

Modellbildung und Simulation

5. Übungsblatt, Sommersemester 09

Abgabe: Dienstag, den 26. Mai, in der Vorlesung

Aufgabe 1 *Ersatzmodellierung der van der Pol'schen Gleichung: große Parameter*

Vergleichen Sie numerisch bestimmte Lösungen der Differentialgleichung

$$x'' + 10(x^2 - 1)x' + x = 0$$

zu verschiedenen Startwerten mit den entsprechenden Lösungen der Gleichung

$$10(y^2 - 1)y' + y = 0.$$

Erläutern Sie Ihre Beobachtungen.

Aufgabe 2 *Ersatzmodellierung der van der Pol'schen Gleichung: kleine Parameter*

Beurteilen Sie aufgrund sorgfältiger Simulationsrechnungen mit unterschiedlichen Parameterwerten ε , wie gut die periodische Lösung der Gleichung

$$x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$$

mit $x_1'(0) = 0$ durch die Funktionen

$$y_1(t) = \frac{3}{4} \sin t - \frac{1}{4} \sin 3t$$

bzw.

$$y_2(t) = 2 \cos \tau + \varepsilon \left(\frac{3}{4} \sin \tau - \frac{1}{4} \sin 3\tau \right) + \varepsilon^2 \left(-\frac{1}{8} \cos \tau + \frac{3}{16} \cos 3\tau - \frac{5}{96} \cos 5\tau \right)$$

mit $\tau = (1 - \varepsilon^2/16)t$ approximiert wird.

Aufgabe 3 *Simulation der selbsterregten Schwingung mit Schrittweitensteuerung*

Verwenden Sie den in der Vorlesung beschriebenen Algorithmus zur Schrittweitensteuerung für das explizite Euler-Verfahren, um Lösungen der van der Pol'schen Differentialgleichung

$$x'' + 2a(x^2 - 1)x' + x = 0$$

in den Fällen $a = 1/4, a = 1/2, a = 3/4$ zu berechnen. Stellen die Lösungskurven im Phasenraum und den Graphen der Lösungsfunktion $t \mapsto x(t)$ graphisch dar. Vergleichen Sie Ihre Resultate mit den Ergebnissen zu Übungsblatt 4.

Aufgabe 4 *Das Modell von Lefever und Nicolis*

Ergründen Sie das Phasenportrait des Systems

$$\begin{aligned} y_1' &= 1 + y_1^2 y_2 - 4y_1 \\ y_2' &= 3y_1 - y_1^2 y_2 \end{aligned}$$

im Quadranten $\{y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\}$ auf der Grundlage sorgfältiger Simulationsrechnungen. Formulieren Sie Beweisskizzen für die beobachteten Phänomene.