

ANALYSIS I

Wintersemester 2009/10, TU Dortmund, Michael Voit
Kurzschrift

1 Grundlegende Begriffe

Sammlung wichtiger Begriffe und Notationen.

1.1 Definition. (nach G. Cantor) Eine Menge ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterscheidbarer Objekte zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen Elemente der Menge.

Notationen:

$x \in A$ heißt, daß das Objekt x ein Element der Menge A ist.

$x \notin A$ heißt, daß das Objekt x kein Element der Menge A ist.

$A \subset B$ heißt, daß die Menge A eine Teilmenge der Menge B ist,

d.h., jedes Element von A ist auch Element von B .

$A \supset B$ heißt $B \subset A$, d.h., A ist Obermenge von B .

\emptyset ist das Symbol für die leere Menge, die kein Objekt enthält.

Beispiele:

(1) Beschreibung durch Aufzählen der Elemente. Zum Beispiel:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen (Konvention $0 \notin \mathbb{N}$!)

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ Menge der ganzen Zahlen.

(2) Beschreibung durch Angabe von Eigenschaften der Elemente: $2\mathbb{N} = \{2n : n \in \mathbb{N}\} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ gerade}\}$ Menge der geraden Zahlen in \mathbb{N} .

$\mathbb{Q} = \{m/n : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ Menge der rationalen Zahlen.

Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen (vgl. Kapitel 3).

$:=$ bedeutet: Die linke Seite wird durch die rechte Seite definiert.

1.2 Definition. Mengenoperationen:

(1) $A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$ Vereinigung von A und B .

(2) $A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$ Schnitt von A und B .

(3) $A \setminus B := \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$.

(4) $A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ und } b \in B\}$ ist die Menge aller Paare mit dem ersten Eintrag aus A und dem zweiten aus B . Die Menge $A \times B$ wird als kartesisches Produkt bezeichnet.

1.3 Definition. Funktionen: Es seien $A, B \neq \emptyset$ Mengen. Eine Funktion (oder Abbildung) ist eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ genau ein Element $y \in B$ zuordnet, das dann $f(x)$ genannt wird.

A heißt Definitionsbereich von f , B der Zielbereich von f , und $f(A) := \{f(x) : x \in A\} \subset B$ Wertebereich von f .

$\Gamma_f := \{(x, f(x)) \in A \times B : x \in A\} \subset A \times B$ heißt Graph von f .

Beispiele zur Darstellung einer Funktion:

(1) $A := \{\text{alle Studierenden der TU Dortmund}\}, B = \mathbb{N}$. Die Funktion

$$f : A \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto f(x) := \text{Alter von } x$$

ordnet jedem Studierenden sein Alter zu.

(2) $A := B := \mathbb{R}$, Betrachte die Quadratfunktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := x^2$$

mit Wertebereich $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ (vgl. später). Beachte hier, daß der Graph Γ_f genau aus den Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ besteht mit $y = x^2$.

1.4 Definition. Eigenschaften von Funktionen: Es sei $f : A \rightarrow B$ eine Funktion.

(1) f heißt injektiv, falls es zu jedem $y \in B$ höchstens ein $x \in A$ gibt mit $f(x) = y$, d.h., für alle $x_1, x_2 \in A$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(2) f heißt surjektiv, falls es zu jedem $y \in B$ mindestens ein $x \in A$ gibt mit $f(x) = y$, d.h., Zielbereich und Wertebereich stimmen überein.

(3) f heißt bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist, d.h., zu jedem $y \in B$ existiert genau ein $x \in A$ mit $f(x) = y$.

Beispiele:

(1) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$, ist injektiv, nicht surjektiv.

(2) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n + 1$, ist bijektiv.

(3) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n^2$, ist nicht injektiv und nicht surjektiv.

Beachte, daß obige Begriffe stark vom Definitions- und Zielbereich einer Funktion abhängen und nicht allein von der Abbildungsvorschrift.

1.5 Definition. Folgen: Es sei $A \neq \emptyset$ eine Menge. Eine Folge mit Werten in A ist definiert als eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow A$. Setzt man $a_n = f(n)$ für $n \in \mathbb{N}$, so schreibt man oft statt f die Folge als $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder (a_1, a_2, \dots) . Oft modifiziert man die Schreibweise: Statt einer Funktion $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow A$ schreibt man etwa die Folge als $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ oder (a_0, a_1, a_2, \dots) .

Beispiel: Die Folge $(n^2)_{n \in \mathbb{N}_0} = (0, 1, 4, 9, 16, \dots)$ der Quadratzahlen entspricht der Funktion $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0, n \mapsto n^2$.

Oft werden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv konstruiert, d.h.,

- (1) a_1 ist gegeben, und
- (2) für jedes $n \in \mathbb{N}$ wird a_{n+1} durch eine Vorschrift aus a_1, \dots, a_n bestimmt.

Beispiel: Sei $a_1 := 1$ und $a_{n+1} = 2a_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots)$

1.6 Definition. Aussagenlogische Symbole: Es seien A, B Aussagen, die entweder wahr oder falsch sind.

$A \implies B$ heißt, daß die Aussage A die Aussage B impliziert, d.h., wenn A richtig ist, muss auch B richtig sein

$A \iff B$ heißt, daß die Aussagen A und B äquivalent sind, d.h., A ist richtig genau dann, wenn B richtig ist.

\forall Für alle

\exists Es existiert mindestens ein.....

\exists_1 Es existiert genau ein.....

:

\neg Negation einer Aussage, d.h., $\neg A$ ist richtig genau dann, wenn A falsch ist.

Beispiele:

$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : m \geq n$ ist eine richtige Aussage

$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : m < n$ ist eine falsche Aussage (Zu $n = 1$ existiert kein m).

$\neg \forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : m < n$ ist eine richtige Aussage; diese Aussage ist äquivalent zu $\exists n \in \mathbb{N} \forall m \in \mathbb{N} : m \geq n$.

$\forall n \in \mathbb{N} \exists_1 m \in \mathbb{N}_0 : n = m + 1$ ist eine richtige Aussage.

2 Vollständige Induktion

2.1 Definition. Das Induktionsaxiom.

2.2 Satz. *Prinzip der vollständigen Induktion.*

2.3 Satz. *Prinzip der vollständigen Induktion bei verschobenem Induktionsanfang.*

2.4 Definition. Summen- und Produktzeichen.

2.5 Beispiel. Arithmetische Summenformel.

2.6 Beispiel. Geometrische Summenformel.

2.7 Definition. Fakultät.

2.8 Satz. *Die Anzahl der möglichen Permutationen einer n -elementigen Menge ist $n!$.*

2.9 Definition. Binomialkoeffizient.

2.10 Satz. *Eigenschaften von Binomialkoeffizienten.*

Pascalsches Dreieck.

2.11 Satz. *Für $0 \leq k \leq n$ ist die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge gleich $\binom{n}{k}$.*

Bsp.: Lotto 6 aus 49.

2.12 Satz. *Binomische Formel: $(x + y)^n = \dots$*

Spezialfälle der Binomischen Formel.

3 Der Körper der reellen Zahlen

Motivation der Erweiterungen von Zahlbereichen: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$.

Geometrische Motivation der Existenz von $\sqrt{2}$.

3.1 Satz. *Es existiert kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.*

Charakterisierung der Menge \mathbb{R} durch wichtige Eigenschaften ("Axiome"): Körperaxiome, Ordnungsaxiome und sog. Vollständigkeit.

3.2 Definition. Körper.

Beispiele: \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{F}_2 .

3.3 Korollar. *Folgerungen aus den Körperaxiomen, wichtige Rechenregeln.*

3.4 Korollar. *Rechenregeln für endliche Summen (Assoziativität, Kommutativität, Distributivität).*

3.5 Definition. Potenzen.

3.6 Definition. Ordnungsaxiome, Definition eines angeordneten Körpers.

Bsp.: \mathbb{Q} , \mathbb{R} sind angeordnete Körper.

3.7 Satz. *Rechenregeln für Ungleichungen.*

Bsp.: \mathbb{F}_2 kein angeordneter Körper.

3.8 Definition. Betrag.

3.9 Satz. *Rechenregeln für Betrag (Multiplikativität, Dreiecksungleichung etc.)*

3.10 Definition. Intervalle (offen, abgeschlossen, halboffen).

3.11 Definition. Minimum, Maximum.

3.12 Satz. *Bernoulli-Ungleichung: $(1+x)^n \geq 1+nx$ für $x \geq -1$.*

3.13 Definition. Das archimedische Axiom.

Bsp.: \mathbb{Q} , \mathbb{R} sind archimedisch angeordnete Körper

3.14 Korollar. *Folgerungen aus dem archimedischen Axiom*

3.15 Definition. Es sei K ein angeordneter Körper und $M \subset K$, $M \neq \emptyset$.

- (1) $s \in K$ heißt obere Schranke von M , falls $x \leq s$ für alle $x \in M$ gilt. Analoge Definition einer unteren Schranke.
- (2) M heißt nach oben beschränkt, falls es eine obere Schranke von M gibt. Analoge Definition von nach unten beschränkt.
- (3) M heißt beschränkt, falls M nach oben und unten beschränkt ist.
- (4) Besitzt M eine obere Schranke m mit $m \in M$, so heißt m Maximum von M , in Zeichen: $m = \max M$ (Analog Minimum).

Beispiele für Intervalle M .

Achtung: Bei beschränkten Mengen muss nicht unbedingt ein Maximum existieren!

3.16 Definition. Es sei K ein angeordneter Körper und $M \subset K$, $M \neq \emptyset$.

- (1) $s \in K$ heißt Supremum von M , falls s eine kleinste obere Schranke von M ist, d.h., s ist eine obere Schranke von M , und für jede obere Schranke $t \in K$ von M gilt $s \leq t$.
- (2) Analoge Def. des Infimum als größte untere Schranke.

3.17 Satz. *Es sei K ein angeordneter Körper und $M \subset K$, $M \neq \emptyset$.*

- (1) *Ein Maximum von M ist auch ein Supremum von M .*
- (2) *Ein Minimum von M ist auch ein Infimum von M .*
- (3) *M hat höchstens ein Supremum, Infimum, Maximum, Minimum.*

Bsp.: Supremum bei offenen Intervallen
Bezeichnungen $\sup M$ und $\inf M$.

3.18 Definition. Vollständigkeit von \mathbb{R} (auch Supremumseigenschaft von \mathbb{R} genannt): Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge M von \mathbb{R} hat (genau) ein Supremum.

3.19 Korollar. Existenz des Infimum bei nach unten beschränkten, nichtleeren Mengen $M \subset \mathbb{R}$.

3.20 Lemma. Sei $M \subset \mathbb{R}$ nicht leer und nach oben beschränkt, und sei $s := \sup M$. Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $x \in M$ mit $s - \epsilon < x < s$.

3.21 Bemerkungen. (1) Das Vollständigkeitsaxiom impliziert das archimedische Axiom.

(2) Man kann mit großem Aufwand zeigen, daß es bis auf die Benennung der Elemente (sog. Isomorphie) genau einen vollständigen angeordneten Körper gibt. Dieser Körper umfasst den Körper \mathbb{Q} echt. Er wird dann als \mathbb{R} bezeichnet.

(3) Wir zeigen unten $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sowie die Nichtvollständigkeit von \mathbb{Q} . Zahlen in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißen irrational.

3.22 Lemma. Für $0 < a < b$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $0 < y^k - x^k \leq (y - x)ky^{k-1}$.

3.23 Satz. Existenz von Wurzeln: Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ existiert genau ein $y \in \mathbb{R}$ mit $y > 0$ und $y^k = x$.

Notation: $y := x^{1/k}$ heißt k -te Wurzel von x .

3.24 Korollar. \mathbb{Q} ist nicht vollständig und $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$.

3.25 Satz. Für $x, y \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $(x \cdot y)^{1/k} = x^{1/k} \cdot y^{1/k}$.

4 Komplexe Zahlen

Motivation der Erweiterungen von Zahlbereichen $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ durch Lösbarkeit gewisser Gleichungen. Analog Erweiterung $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, um z.B. die Gleichung $x^2 = -1$ lösen zu können.

IDEE: Sei \mathbb{K} ein Körper mit $\mathbb{R} \subset \mathbb{K}$, so daß ein $x \in \mathbb{K}$ existiert mit $x^2 = -1$. Nenne eine solche Lösung $i \notin \mathbb{R}$, d.h. $i^2 = -1$. Betrachte beliebige $x, y, u, v \in \mathbb{R} \subset \mathbb{K}$. Dann

$$(x+iy)+(u+iv) = x+y+i(u+v), \quad (x+iy)(u+iv) = (xu-yv)+i(yu+xv).$$

Dies motiviert

4.1 Definition. Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

4.2 Satz. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper mit den neutralen Elementen $0 := (0, 0)$ und $1 := (1, 0)$.

4.3 Satz. Identifizierung von \mathbb{R} als Unterkörper von \mathbb{C} .

4.4 Definition. Definition von $i \in \mathbb{C}$ und rein reellen bzw. imaginären Zahlen.

Bsp.: $i^2 = -1$.

4.5 Definition. Komplexe Konjugation und ihre Eigenschaften.

4.6 Definition. Der Betrag einer komplexen Zahl und seine Eigenschaften (u.a. Dreiecksungleichung, Bestimmung von $1/z$).

4.7 Bemerkung. \mathbb{C} lässt sich NICHT anordnen, also Vorsicht beim Vgl. komplexer Zahlen!!!

4.8 Bemerkung. Geometrische Deutung von Addition und Multiplikation in \mathbb{C} : Addition ist Vektoraddition, Multiplikation ist Drehstreckung.

4.9 Satz. Jede quadratische Gleichung der Form $z^2 + az + b = 0$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ hat mindestens eine Lösung in \mathbb{C} .

Beweis mit quadratischer Ergänzung und Angabe eines Verfahrens zur Berechnung der i.a. zwei Lösungen dieser Gleichung!

4.10 Satz. *Fundamentalsatz der Algebra.*

5 Wichtige Funktionen: Polynome und rationale Funktionen

5.1 Definition. Reell- und komplexwertige Funktionen.

Beispiele: Identität, Betragsfunktion, Gaussklammer, Sägezahnfunktion.

5.2 Definition. Monoton wachsende und fallende Funktionen sowie streng monoton wachsende und fallende Funktionen

5.3 Definition. Algebraische Operationen für reell- und komplexwertige Funktionen.

5.4 Definition. Komposition von Funktionen.

5.5 Definition. Umkehrfunktion und ihr Graph.

5.6 Lemma. *Strenge Monotonie impliziert Injektivität und Existenz einer geeigneten, wieder streng monotonen Umkehrfunktion.*

5.7 Definition. Polynome, Leitkoeffizient, Grad.

5.8 Satz. *Rechenregeln für Polynome, u.a. das Cauchyprodukt.*

5.9 Satz. *Polynomdivision mit Rest.*

5.10 Definition. Nullstellen von Polynomen.

5.11 Lemma. *Abspalten von Termen der Form $(x - a)$ für Nullstelle a .*

5.12 Satz. *Ein Polynom p hat maximal grad p viele verschiedene Nullstellen in \mathbb{C} .*

5.13 Definition. Mehrfache Nullstellen von Polynomen.

5.14 Satz. *Identitätssatz für Polynome.*

Bemerkung zum Gleichheitsbegriff von Polynomen in Algebra und Analysis.

5.15 Definition. Verallgemeinerte Binomialkoeffizienten.

5.16 Satz. *Additionstheorem für verallgemeinerte Binomialkoeffizienten.*

5.17 Satz. *Zerlegung von Polynomen in Linearfaktoren.*

5.18 Lemma. *Gilt für $a \in \mathbb{C}$ und $p \in \mathbb{R}[x]$, daß $p(a) = 0$, so gilt auch $p(\bar{a}) = 0$.*

5.19 Satz. *Reelle Zerlegung von Polynomen in Faktoren vom Grade maximal 2.*

5.20 Definition. Rationale Funktionen.

5.21 Definition. Pole.

5.22 Satz. *Existenz einer Partialbruchzerlegung (PBZ).*

Praktische Durchführung der PBZ.

6 Konvergente Zahlenfolgen

6.1 Definition. Konvergenz von Folgen in \mathbb{C} .

6.2 Lemma. *Folgen haben höchstens einen Limes.*

6.3 Beispiele.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-k} = 0 \text{ für } k \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^k/z^n = 0 \text{ für } |z| > 1, k \in \mathbb{N}.$$

6.4 Lemma. *Konvergente Folgen sind beschränkt.*

6.5 Lemma. *Rechenregeln für konvergente Folgen (Addition, Produkt, usw.).*

6.6 Lemma. *Rechenregeln für REELLWERTIGE konvergente Folgen (Ordnungserhalt, Schachtelungsprinzip).*

6.7 Beispiele. $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{1/n} = 1$ für $x \geq 1$ usw..

6.8 Definition. Monotonie von reellwertigen Folgen.

6.9 Satz. *Monotone, beschränkte Folgen konvergieren gegen $\sup\{a_n : n \geq 1\}$ bzw. $\inf\{a_n : n \geq 1\}$.*

6.10 Beispiel. Algorithmus zur Berechnung von \sqrt{a} für $a > 0$.

6.11 Definition. Limes superior und Limes inferior.

6.12 Satz. *Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte, reellwertige Folge. Dann:*

- (1) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- (2) $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ genau dann, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existiert. In diesen Fall sind diese drei Zahlen gleich.

6.13 Definition. Teilfolgen.

6.14 Satz. *(Bolzano-Weierstrass) Jede beschränkte Folge in \mathbb{R} hat eine konvergente Teilfolge.*

6.15 Definition. Cauchyfolgen in \mathbb{R} .

6.16 Satz. *(Cauchy-Kriterium) Eine Folge in \mathbb{R} ist konvergent genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

6.17 Definition. Bestimmte Divergenz (d.h. Konvergenz gg. $\pm\infty$).

6.18 Definition. Cauchyfolgen in \mathbb{C} .

6.19 Satz. *Eine Folge in \mathbb{C} ist konvergent (bzw. Cauchyfolge) genau dann, wenn dies für die Real- und Imaginärteile der Folge gilt.*

6.20 Satz. *(Cauchy-Kriterium in \mathbb{C}) Eine Folge in \mathbb{C} ist konvergent genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.*

6.21 Satz. *(Bolzano-Weierstrass) Jede beschränkte Folge in \mathbb{C} hat eine konvergente Teilfolge.*

7 Unendliche Reihen

Zu gegebenen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ bildet man die sogenannten Partialsummen

$$s_1 := a_1, \quad s_2 := a_1 + a_2, \quad \dots, \quad s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Allgemeiner:

7.1 Definition. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine \mathbb{R} - oder \mathbb{C} -wertige Folge. Dann bilden die Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ ($n \in \mathbb{N}$) selbst wieder eine \mathbb{R} - oder \mathbb{C} -wertige Folge, die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen.

Beispiele: Arithmetische und geometrische Summen.

7.2 Definition. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine \mathbb{R} - oder \mathbb{C} -wertige Folge. Falls die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen gegen ein $s \in \mathbb{C}$ konvergiert, sagt man:

Die unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert und hat den Wert

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Beispiele:

Die arithmetische Reihe konvergiert nicht.

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ konvergiert für $|x| < 1$.

$\sum_{k=1}^{\infty} 1/(k(k+1)) = 1$.

7.3 Satz. *Cauchy-Kriterium für Reihen.*

7.4 Korollar. (1) Falls $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(2) Ändert man in einer Reihe endlich viele Glieder a_n , oder fügt endlich viele hinzu, so ändert sich nichts an der Konvergenz.

7.5 Satz. *Rechenregeln für Reihen: Addition und skalare Multiplikation.*

7.6 Satz. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine \mathbb{R} -wertige Folge mit $a_n \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen beschränkt ist.

Beispiele:

$\sum_{k=0}^{\infty} 1/k$ konvergiert nicht.

$\sum_{k=0}^{\infty} 1/k^2$ konvergiert.

7.7 Satz. *Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen.*

7.8 Definition. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Beispiele:

Die alternierende harmonische Reihe konvergiert, aber sie konvergiert nicht absolut.

Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ konvergiert absolut für $|x| < 1$, und sie konvergiert nicht für $|x| \geq 1$.

7.9 Satz. *Majorantenkriterium.*

7.10 Korollar. *Jede absolut konvergente Reihe konvergiert.*

7.11 Satz. *Quotientenkriterium.*

7.12 Korollar. *Korollar zum Quotientenkriterium.*

7.13 Satz. *Wurzelkriterium.*

Warnendes Beispiel: Die alternierende harmonische Reihe kann so umgeordnet werden, daß sich nach Umordnung ein anderer Wert ergibt!!!!

7.14 Satz. *Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen.*

7.15 Definition. Formales Cauchy-Produkt von Reihen.

Warnung: Beispiel in Übungen zeigt, daß das Cauchyprodukt von zwei konvergenten Reihen divergieren kann. Andererseits:

7.16 Satz. *Das Cauchyprodukt von absolut konvergenten Reihen konvergiert und ergibt das Produkt der Werte der gegebenen Reihen.*

Beispiel: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1/(1-x)^2$ für $|x| < 1$.

7.17 Definition. Potenzreihen.

7.18 Lemma. *Konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für ein spezifisches $x_0 \in \mathbb{C}$, $x_0 \neq 0$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < x_0$.*

7.19 Definition. Konvergenzradius

$$R := \sup\{r \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{ konvergiert}\} \in [0, \infty].$$

7.20 Satz. *Für $z \in \mathbb{C}$:*

- (1) *Falls $|z| < R$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.*
- (2) *Falls $|z| > R$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ nicht.*

Die Menge $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ heißt Konvergenzkreis der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

7.21 Satz. *Berechnung des Konvergenzradius mit Quotientenkriterium und Wurzelkriterium.*

Beispiele:

Geometrische Reihe hat $R = 1$. Sie konvergiert in keinem Punkt am Rand des Konvergenzkreises.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k$ hat $R = 1$. Sie konvergiert für $x = -1$ und divergiert für $x = 1$.

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k^2$ hat $R = 1$. Sie konvergiert für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| = 1$.

Die sogenannte Exponentialreihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ hat $R = \infty$.

Die sogenannte Logarithmusreihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} x^k/k$ hat $R = 1$.

7.22 Satz. *Cauchy-Produkt von Potenzreihen.*

7.23 Definition. Allg. Binomialreihen $B_s(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k$ für $s, x \in \mathbb{C}$ mit $|x| \leq 1$.

In Verallgemeinerung der Binomischen Formel aus Kapitel 2 gilt:

7.24 Satz. *Für $s \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{C}$, $|x| < 1$ gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} x^k = (1+x)^s.$$

8 Dezimalentwicklungen und Abzählbarkeit

8.1 Definition. Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ eine sogenannte Basis. Meist $b = 10, 2, 16$. Eine Reihe der Form $\pm \sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n}$ mit $a_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ heißt b -adischer Bruch.

8.2 Satz. *Jeder b -adische Bruch ist eine konvergente Reihe und stellt daher eine reelle Zahl dar. Umgekehrt kann jede reelle Zahl als b -adischer Bruch geschrieben werden.*

Beweis: Das Majorantenkriterium 7.9 und ein Vgl. mit der geometrischen Reihe zeigen, daß jeder b -adische Bruch konvergiert. Umgekehrt sei nun o.E. $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$. Sei $k \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl mit $0 < x \leq b^{k+1}$.

Wir konstruieren rekursiv $a_{-k}, a_{-k+1}, \dots \in \{0, 1, \dots, b-1\}$ so, daß für $x_n := \sum_{l=-k}^n a_l b^{-l}$

$$0 \leq x - x_n < b^{-n}$$

gilt. Dies liefert einen b -adischen Bruch $\sum_{l=-k}^{\infty} a_l b^{-l}$, der genau x ergibt.

Warnung: Reelle Zahlen können verschiedene b -adische Bruchdarstellungen haben. Beispiel im Dezimalsystem: $1 = 0,9999\dots$

8.3 Satz. *Eine reelle Zahl ist rational genau dann, wenn sie eine periodische b -adische Darstellung hat.*

Beweisskizze: Sei $x \in \mathbb{Q}$. Nach Abspalten des Vorzeichens und des ganzzahligen Teils sei o.E. $x = m/n$ mit $0 < m < n \in \mathbb{N}$. Nach dem Beweis von Satz 8.2 existiert eine b -adische Darstellung

$$m/n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b^k \quad \text{mit} \quad a_k \in \{0, 1, \dots, b-1\},$$

so dass nach Konstruktion für alle $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$0 \leq m/n - \sum_{l=0}^k a_l b^{-l} < b^{-k}$$

gilt. Also

$$m_k := mb^k - \sum_{l=0}^k a_l b^{k-l} \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

wobei a_{k+1} eindeutig so gewählt wird, dass $0 < m_k b - na_{k+1} < n$ gilt.

Also wird a_{k+1} und damit m_{k+1} eindeutig aus m_k bestimmt. Da aber die m_k nur die endliche Menge $\{0, 1, \dots, n-1\}$ durchlaufen kann, muss sich nach maximal $n+1$ Schritten ein m_k wiederholen. Dies liefert die gesuchte Periode.

Zum Beweis der Umkehrung siehe Vorlesung.

8.4 Definition. (Höchstens) abzählbare Mengen.

Bsp.: \mathbb{N}_0 und \mathbb{Z} abzählbar.

8.5 Satz. *Eine Vereinigung von abzählbar vielen abzählbaren Mengen ist abzählbar.*

8.6 Korollar. \mathbb{Q} ist abzählbar.

8.7 Satz. \mathbb{R} ist NICHT abzählbar.

Beweis mit Cantorschem Diagonalverfahren.

8.8 Korollar. *Die Menge der irrationalen Zahlen ist NICHT abzählbar.*

9 Stetige Funktionen und Grenzwerte

9.1 Definition. $\epsilon - \delta$ -Definition der Stetigkeit in einzelnen Punkten im Definitionsbereich und globale Stetigkeit.

9.2 Definition. Folgenstetigkeit in einzelnen Punkten im Definitionsbereich.

9.3 Satz. *Die $\epsilon - \delta$ -Stetigkeit ist gleichbedeutend zur Folgenstetigkeit in allen Punkten des Definitionsbereichs $D \subset \mathbb{C}$.*

9.4 Satz. *Bei Einschränkung des Definitionsbereichs bleibt Stetigkeit erhalten.*

9.5 Satz. *Regeln für stetige Funktionen: Erhalt unter Addition, Multiplikation usw..*

9.6 Satz. *Stetigkeit bleibt bei Komposition von Funktionen erhalten.*

9.7 Satz. *Zwischenwertsatz.*

9.8 Beispiele. Polynome und rationale Funktionen sind stetig auf \mathbb{C} mit Ausnahme der evtl. Nullstellen im Nenner.

9.9 Korollar. Ist P ein reelles Polynom mit ungeradem Grad, so hat P mindestens eine reelle Nullstelle.

9.10 Satz. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Dann ist $f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ bijektiv, und die Umkehrfunktion f^{-1} ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend.

Eine entsprechende Aussage gilt für stetige, streng monoton fallende Funktionen.

9.11 Beispiel. Wurzelfunktionen $g : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ mit $g(x) := x^{1/n}$ sind stetig.

9.12 Satz. Existenz eines Maximums und Minimums bei stetigen Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

9.13 Definition. Sei $D \subset \mathbb{C}$. Ein $x_0 \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt von D , falls für jedes $\epsilon > 0$ die Menge $D \cap \{x \in \mathbb{C} : |x - x_0| \in]0, \epsilon[\}$ nicht leer ist.

9.14 Definition. Sei $x_0 \in \mathbb{C}$ Häufungspunkt einer Menge $D \subset \mathbb{C}$, und sei $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{C}$. Dann heißt

$$\lim_{x \in D, x \rightarrow x_0} f(x) = a \quad \text{oder kurz} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a :$$

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, daß die Ungleichung $|f(x) - a| < \epsilon$ für alle $x \in D \cap \{x \in \mathbb{C} : |x - x_0| \in]0, \delta[\}$ gilt.

Die Zahl a heißt Limes oder Grenzwert von f in x_0 .

9.15 Bemerkungen. (1) Bei der Schreibweise $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ setzt man STILLSCHWEIGEND voraus, daß x_0 Häufungspunkt des Definitionsbereichs von f ist.

(2) Ein Limes ist im Fall der Existenz eindeutig.

(3) Ist $x_0 \in D$ Häufungspunkt von $D \subset \mathbb{C}$, so gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ genau dann, wenn f in x_0 stetig ist. Dies ist klar, da nach obiger Definition $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ genau der $\epsilon - \delta$ -Definition der Stetigkeit von f in x_0 entspricht.

9.16 Satz. Stetige Fortsetzbarkeit von Funktionen in singulären Punkten.

9.17 Bemerkungen. Konventionen und Spezialfälle bei Funktionen mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$. Insbesondere Definition einseitiger Limiten.

9.18 Beispiele. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^n - 1)/(x - 1) = n$ usw..

9.19 Satz. Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend oder fallend und beschränkt. Dann existieren $\lim_{x \downarrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \uparrow x_0} f(x)$ für $x_0 \in [a, b]$ in den Fällen, in denen diese Limiten möglich sind.

9.20 Satz. *Rechenregeln für Limiten: Addition, Multiplikation, Erhalt von Ungleichungen.*

9.21 Definition. Limiten für $x \rightarrow \pm\infty$.

9.22 Beispiel. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$ und weitere Beispiele

9.23 Definition. Uneigentliche Limiten.

9.24 Satz. *Rechenregeln für uneigentliche Limiten.*

Vorsicht bei Limiten der Form ∞/∞ und $\infty - \infty$!

10 Exponentialfunktion, Logarithmus und trigonometrische Funktionen

Motivation der Funktionalgleichung des natürlichen Wachstums:

$$f(s+t) = f(s) \cdot f(t) \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Sie tritt auf bei Zinseszinsrechnung, radioaktivem Zerfall, Populationswachstum, ...

10.1 Definition. Die Funktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ heißt Exponentialfunktion. Beachte dabei, dass die Potenzreihe den Konvergenzradius ∞ hat.

Aus Übungen ist bekannt, dass \exp der Funktionalgleichung des natürlichen Wachstums genügt mit $\exp(0) = 1$.

10.2 Satz. *Sei $z \in \mathbb{C}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$. Dann*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + z_n/n)^n = \exp(z).$$

Speziell $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + z/n)^n = \exp(z)$.

10.3 Satz. *(Eigenschaften der Exponentialfunktion:)*

- (1) *Funktionalgleichung: Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$.*
- (2) *$\lim_{z \rightarrow 0} (\exp(z) - 1)/z = 1$.*

Ist umgekehrt $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine BELIEBIGE Funktion mit den Eigenschaften (1) und (2), so gilt $f(z) = \exp(z)$ für $z \in \mathbb{C}$.

10.4 Korollar. *$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig.*

10.5 Satz. *(Weitere Eigenschaften der Exponentialfunktion)*

- (1) *$\exp(0) = 1$.*

- (2) Euler-Zahl: $e := \exp(1) \simeq 2,718\dots$
- (3) $\exp(-z) = 1/\exp(z)$.
- (4) Für $s = m/n \in \mathbb{Q}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp(s) = e^{m/n} := (e^m)^{1/n}$.

Dies motiviert die Schreibweise $e^z := \exp(z)$ für beliebige $z \in \mathbb{C}$. In dieser Schreibweise gilt dann $e^z e^w = e^{z+w}$.

10.6 Satz. (Eigenschaften der reellen Exponentialfunktion:)

- (1) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) > 0$.
- (2) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ ist bijektiv, stetig und streng monoton wachsend.
- (3) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x/x^n = \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n/e^x = 0$.

10.7 Bemerkung. Praktische approximative Berechnung von e^x für $x \in \mathbb{R}$ über die Potenzreihe mit Fehlerabschätzung.

10.8 Satz. e ist irrational.

10.9 Definition. Die Umkehrfunktion von $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[$ ist stetig und streng monoton wachsend. Sie wird der natürliche Logarithmus genannt. Also gilt für $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$: $y = e^x$ genau dann, wenn $x = \ln y$.

10.10 Satz. (Rechenregeln für den natürlichen Logarithmus)

- (1) Für $x, y > 0$ gilt $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
- (2) $\ln(1/x) = -\ln(x)$, $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$.
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)/x = 1$.
- (4) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x)/x^{1/n} = 0$.

10.11 Definition. Die Exponentialfunktion zur beliebigen Basis $a > 0$ ist die Funktion

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto a^z := \exp(z \cdot \ln(a)).$$

Eigenschaften:

- (1) $z \mapsto a^z$ ist stetig auf \mathbb{C} .
- (2) Für $a > 1$ ist $\mathbb{R} \rightarrow]0, \infty[, x \mapsto a^x$ streng monoton wachsend. Für $0 < a < 1$ ist die Abbildung streng monoton fallend.
- (3) Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $a, b > 0$ gilt $(a^x)^y = a^{xy}$ und $a^x b^x = (ab)^x$.
- (4) Für $z, w \in \mathbb{C}$, $a^{z+w} = a^z a^w$.
- (5) $\lim_{z \rightarrow 0} (a^z - 1)/z = \ln(a)$.

10.12 Definition. Sei $s \in \mathbb{R}$. Betrachte die allg. Potenzfunktion $p_s :]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ mit $p_s(x) := x^s := \exp(s \cdot \ln(x))$. Eigenschaften:

- (1) p_s ist stetig.

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^s = \infty$ für $s > 0$.

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} x^s = 0$ für $s > 0$.

10.13 Definition. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$. Also gilt für $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $|e^{ix}| = 1$.

Setze

$$\cos z := (e^{iz} + e^{-iz})/2 \quad \text{und} \quad \sin z := (e^{iz} - e^{-iz})/(2i).$$

Beide Funktionen haben also bekannte Potenzreihenentwicklungen, und es gilt für $x \in \mathbb{R}$ die Eulersche Formel

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

10.14 Satz. (*Eigenschaften von Sinus und Cosinus*)

(1) $\cos z$ ist gerade und $\sin z$ ungerade.

(2) Additionstheoreme

(3) Differenzenformeln

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x = 1$.

(5) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sin x, \cos x \in \mathbb{R}$.

10.15 Lemma. Die Funktion $x \mapsto \cos x$ ist auf $[0, 2]$ streng monoton fallend und hat dort genau eine Nullstelle.

10.16 Definition. Sei $x_0 \in [0, 2]$ die eindeutige Nullstelle des Cosinus. DEFINIERE die Kreiszahl $\pi := 2x_0$.

Dann $\cos(\pi/2) = 0$ per definitionem sowie $\sin(\pi/2) = 1$ nach der Euler-Formel.

Später $\pi \simeq 3,1415\dots$

10.17 Bemerkung. Wertetafel für $e^{ix}, \sin x, \cos x$ für $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$.

10.18 Bemerkung. 2π -Periodizität von $e^{ix}, \sin x, \cos x$.

10.19 Satz. (1) $\cos x$ hat auf \mathbb{R} genau die Nullstellen $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(2) $\sin x$ hat auf \mathbb{R} genau die Nullstellen $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(3) 2π ist die kleinste Periode von $\cos x$ und $\sin x$.

10.20 Korollar. Für $z \in \mathbb{C}$ gilt $e^z = 1$ genau dann, wenn $z = 2k\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Periodizitätsüberlegungen liefern auch:

10.21 Lemma. $x \mapsto \cos x$ ist streng monoton fallend auf $[0, \pi]$, und $x \mapsto \sin x$ ist streng monoton steigend auf $[-\pi/2, \pi/2]$.

10.22 Definition. Tangens und Kotangens.

10.23 Satz. *Eigenschaften des Tangens.*

10.24 Definition. Arcus-Funktionen.

- (1) Da $\tan :] - \pi/2, \pi/2[\rightarrow] - \infty, \infty[$ stetig und streng monoton wachsend ist, existiert eine eindeutige Umkehrfunktion

$$\arctan :] - \infty, \infty[\rightarrow] - \pi/2, \pi/2[,$$

die stetig und streng monoton wachsend ist.

- (2) Analog sind $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ und $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ definiert als Umkehrfunktionen.

10.25 Satz. *Polarkoordinaten*

10.26 Satz. *n-te komplexe Einheitswurzeln*

11 Differentialrechnung

11.1 Definition. Einführung von Differenzenquotient und Differentialquotient als Sekanten- bzw. Tangentensteigungen.

11.2 Definition. Differenzierbarkeit einer Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ in einem Punkt x_0 auf dem offenen Intervall I . Ferner Definition der rechts- und linksseitigen Ableitungen.

11.3 Beispiele. (1) Differenzierbarkeit von $|x|$.

(2) Für $f(x) = x^n$ gilt $f'(x) = nx^{n-1}$.

(3) Für $f(x) = e^{cx}$ gilt $f'(x) = ce^{cx}$.

(3) Für $f(x) = \ln x$ gilt $f'(x) = 1/x$.

11.4 Satz. *Umformulierung der Differenzierbarkeit in einem Punkt über die Approximierbarkeit der Funktion durch eine lineare Funktion.*

11.5 Satz. *Differenzierbarkeit impliziert Stetigkeit.*

11.6 Definition. Lokale und globale Extrema.

11.7 Satz. *Notwendige Bedingung für lokale Extrema bei differenzierbaren Funktionen.*

11.8 Bemerkung. Praktisches Vorgehen zur Suche nach globalen Extrema.

11.9 Satz. *Ableitungsregeln für Summen, Produkte und Quotienten von differenzierbaren Funktionen.*

11.10 Beispiele. (1) Für $f(x) = x^{-n}$ gilt $f'(x) = -nx^{-n-1}$.

(2) Für $f(x) = \cos x$ gilt $f'(x) = -\sin x$.

(3) Für $f(x) = \sin x$ gilt $f'(x) = \cos x$.

11.11 Satz. Kettenregel.

11.12 Beispiele. (1) Für $f(x) = x^a$ mit $a > 0, a \in \mathbb{R}$ gilt $f'(x) = ax^{a-1}$.

(2) Für $f(x) = \exp(h(x))$ gilt $f'(x) = h'(x)\exp(h(x))$.

(3) Logarithmische Ableitung.

11.13 Satz. Ableitung der Umkehrfunktion.

11.14 Beispiele. Ableitung der Arcus-Funktionen.

11.15 Definition. Definition höherer Ableitungen und die Vektorräume der n -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf einem Intervall.

11.16 Satz. Satz von Rolle.

11.17 Satz. Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

11.18 Korollar. Ist $f' = 0$ auf einem Intervall I , so ist f konstant auf I .

11.19 Satz. Zusammenhang zwischen Monotonieverhalten von f und Vorzeichen von f' .

11.20 Satz. Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema.

11.21 Satz. Bestimmung ALLER differenzierbaren Lösungen der Wachstumsgleichung $f'(x) = a \cdot f(x)$.

11.22 Satz. Verallgemeinerter Mittelwertsatz

11.23 Satz. Regeln von l'Hospital.

11.24 Beispiele. Anwendungen der Regeln von l'Hospital.

11.25 Definition. Definition der Begriffe (streng) konvex und konkav mit geometrischer Deutung.

11.26 Lemma. Reformulierung der Konvexität.

11.27 Satz. Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ konvex auf dem OFFENEN Intervall I , so ist f stetig auf I , und in jedem Punkt aus I existieren links- und rechtsseitige Ableitungen.

11.28 Satz. Krümmungsverhalten differenzierbarer Funktionen: Eine differenzierbare Funktion f ist konvex auf einem Intervall genau dann, wenn f' dort monoton wachsend ist.

11.29 Korollar. *Ist f eine zweimal differenzierbare Funktion auf einem Intervall, so ist f konvex auf dem Intervall genau dann, wenn f'' dort nichtnegativ ist.*

11.30 Definition. Wendepunkte.

11.31 Satz. *Notwendiges Kriterium für Wendepunkte.*

Anwendungen:

11.32 Satz. *Ungleichung für gewichtete arithmetische und geometrische Mittel.*

11.33 Definition. p -Norm auf \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n .

11.34 Satz. *Hölder-Ungleichung auf \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n .*

11.35 Satz. *Minkowski-Ungleichung auf \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n .*

12 Gleichmäßige Konvergenz

12.1 Definition. Punktweise Konvergenz von Funktionen

Beispiel das zeigt, daß bei punktweiser Konvergenz i.a. Stetigkeit nicht erhalten bleibt.

12.2 Definition. Gleichmäßige Konvergenz von Funktionen

12.3 Definition. Beschränktheit von Funktionen und Supremumsnorm.

12.4 Satz. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f genau dann, wenn $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

12.5 Satz. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen f . Sind alle f_n stetig, so ist auch f stetig.

12.6 Satz. *Cauchy-Kriterium für gleichmäßig konvergente Funktionenfolgen.*

12.7 Definition. Gleichmäßig konvergente Reihen von Funktionen

12.8 Satz. *Cauchy-Kriterium für gleichmäßig konvergente Funktionenreihen.*

12.9 Satz. *Majoranten-Kriterium für gleichmäßig konvergente Funktionenreihen.*

12.10 Satz. *Kriterium für gleichmäßig konvergente Potenzreihen.*

12.11 Korollar. *Eine Potenzreihe stellt im Inneren des Konvergenzkreises stets eine stetige Funktion dar.*

12.12 Beispiele. Exponentialreihe und allgemeine Binomialreihen.

12.13 Satz. *Für $x \in]-1, 1[$ und $s \in \mathbb{R}$ gilt $(1+x)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n$.*

13 Integration

Motivation: Flächeninhalte berechnen!

13.1 Definition. Treppenfunktionen, der Raum der Treppenfunktionen, und Intervallzerlegungen.

13.2 Definition. Das Integral einer Treppenfunktion.

13.3 Lemma. *Das Integral einer Treppenfunktion ist unabhängig von der gewählten Zerlegung des Intervalls.*

13.4 Lemma. *Eigenschaften des Integrals von Treppenfunktionen:*

- (1) *Linearität.*
- (2) *Beschränktheit.*
- (3) *Komplexe Konjugation.*
- (4) *Monotonie.*

13.5 Definition. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Regelfunktion, falls eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen existiert, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

13.6 Definition. Definition des Integrals von Regelfunktionen (mit Nachweis der Konsistenz der Definition!).

13.7 Satz. *Der Raum der Regelfunktionen auf $[a, b]$ ist ein Vektorraum, und obige vier Aussagen in 13.4 gelten auch für Regelfunktionen statt Treppenfunktionen.*

13.8 Satz. *Charakterisierung von Regelfunktionen: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist Regelfunktion genau dann, wenn in allen möglichen Fällen $\lim_{x \uparrow x_0} f(x)$ und $\lim_{x \downarrow x_0} f(x)$ existieren.*

13.9 Korollar. *Jede stetige und jede monotone Funktion ist eine Regelfunktion.*

13.10 Korollar. *Sind f, g Regelfunktionen, so sind auch fg , $|f|^p$, und im Falle der globalen Existenz, f/g Regelfunktionen.*

13.11 Beispiele. Die Dirichletsche Sprungfunktion sowie $f(x) := \sin(1/x)$ für $x > 0$ mit $f(0) := 0$ bilden KEINE Regelfunktionen!

13.12 Satz. *Zusammensetzen der Integrale bei verschiedenen Integrationsbereichen.*

13.13 Definition. Definition von $\int_a^b f(x) dx$ für $a \geq b$.

13.14 Satz. *Mittelwertsatz der Integralrechnung.*

13.15 Satz. Ist $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty[$ stetig mit $\int_a^b f(x) dx = 0$, so gilt $f = 0$ auf $[a, b]$.

13.16 Definition. Stammfunktion.

13.17 Lemma. Eine Stammfunktion ist eindeutig bis auf eine additive Konstante.

13.18 Satz. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

13.19 Definition. Unbestimmte Integrale.

Liste von Beispielen

Nun Techniken zur Bestimmung von Integralen:

13.20 Satz. Partielle Integration.

Beispiele

13.21 Satz. Substitutionsregel.

13.22 Beispiele. (1) $c \int_a^b f(ct) dt = \int_{ca}^{cb} f(x) dx$.

(2) $\int_a^b g'(x)/g(x) dx = \ln |g(b)| - \ln |g(a)|$.

(3) Berechnung der Fläche eines Halbkreises und Kreises.

(4) $\int \arctan(x) dx = (\ln |1 + x^2|)/2 + \text{Konst.}$.

(5) Rekursive Berechnung von $\int x^n e^x dx$, $\int x^n \sin x dx$, $\int x^n \cos x dx$.

(6) Rekursive Berechnung von $\int \cos^n x dx$.

13.23 Beispiel. Bestimmung von unbestimmten Integralen rationaler Funktionen. Diese sind via Partialbruchzerlegung darstellbar als Linearkombinationen von rationalen Funktionen sowie Logarithmen und dem Arcustangens mit passenden Argumenten.

13.24 Definition. Ober- und Unterintegral sowie Riemann-Integrierbarkeit.

13.25 Satz. Jede Regelfunktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar auf $[a, b]$, und das in 13.6 definierte Integral stimmt mit dem Riemann-Integral überein.

13.26 Bemerkung. (1) Es gibt Funktionen, die auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar sind und keine Regelfunktionen sind. Sie spielen in der Praxis keine große Rolle.

(2) Bei Kenntnis der gleichmäßigen Konvergenz ist die Einführung des Regelintegrals einfacher als die Einführung des Riemann-Integrals. In der Schule Beprechung des Riemann-Integrals, da dort keine glm. Konvergenz besprochen wird.

13.27 Definition. Riemann-Summen.

13.28 Satz. Sei f eine Regelfunktion auf $[a, b]$. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ wie folgt: Ist $Z = \{a = x_0 < \dots < x_n = b\}$ eine beliebige Zerlegung von $[a, b]$ mit Feinheit $\Delta(Z) < \delta$, so gilt bei beliebiger Wahl der Stützstellen $z_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$$\left| \sum_{k=1}^n f(z_k)(x_k - x_{k-1}) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \epsilon.$$

13.29 Definition. p -Norm für Regelfunktionen.

13.30 Satz. Hölder-Ungleichung für Integrale von Regelfunktionen (mit Cauchy-Schwarz-Ungleichung als Spezialfall).

13.31 Satz. Minkowski-Ungleichung.

13.32 Beispiel. Beispiel, daß punktweise Konvergenz auf $[a, b]$ im allgemeinen KEINE Konvergenz der Integrale impliziert. Andererseits:

13.33 Satz. Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_n$ von Regelfunktionen gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen f , so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

13.34 Beispiel. Beispiel, daß gleichmäßige Konvergenz einer Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stetig differenzierbarer Funktionen im allgemeinen nicht die Vertauschbarkeit von Limes und Ableitung impliziert.

13.35 Satz. Sei $I \subset \mathbb{R}$ Intervall und seien $f_n \in C^{(1)}(I)$ punktweise konvergent gg. ein f , so daß die Ableitungen f'_n gleichmäßig gegen eine Funktion g konvergieren. Dann gilt $f \in C^{(1)}(I)$ mit $f' = g$, d.h., man kann Ableitung und Limes vertauschen.

13.36 Satz. Eine Potenzreihe ist im Inneren des Konvergenzintervalls differenzierbar, und man darf die unendliche Summation und Differentiation vertauschen. Ferner hat die gliedweise differenzierte Potenzreihe den gleichen Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe.

13.37 Beispiel. Logarithmusreihe.

13.38 Satz. Abelscher Grenzwertsatz.

Beispiel: $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 \dots = \ln 2$.

14 Uneigentliche Integrale

14.1 Definition. Uneigentliche Integrierbarkeit

14.2 Beispiele. (1) $\int_1^\infty x^{-s} dx$ existiert genau für $s > 1$.

- (2) $\int_0^1 x^{-s} dx$ existiert genau für $s < 1$.
- (3) $\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-1} dx = \pi$.
- (4) $\int_{-\infty}^{\infty} x dx$ existiert NICHT als uneigentliches Integral.

14.3 Satz. *Majorantenkriterium.*

14.4 Satz. *Grenzwertkriterium.*

14.5 Satz. *Integralkriterium.*

Beispiele zum Integralkriterium. Dies erklärt Zusammenhang der Konvergenz gewisser unendlicher Reihen und der Existenz uneigentlicher Integrale!

14.6 Definition. Gamma-Funktion $\Gamma(x)$

14.7 Satz. *Eigenschaften der Gammafunktion:*

- (1) $\Gamma(1) = 1$ und $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ für $s > 0$.
- (2) $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N}$.
- (3) Γ ist stetig auf $]0, \infty[$, und $\ln \Gamma$ ist konvex.

14.8 Satz. *Eindeutigkeitssatz von Bohr-Mollerup mit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)} = \Gamma(x) \quad (x \in]0, 1[).$$

14.9 Satz. *Für $x, y > 0$ gilt*

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

14.10 Korollar. $\Gamma(1/2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

14.11 Satz. *Stirlingsche Formel.*

15 Taylor-Approximation

15.1 Definition. Taylor-Polynome.

15.2 Satz. *Integralformel für das Taylor-Restglied.*

15.3 Satz. *Restgliedformel von Lagrange.*

15.4 Satz. *Qualitative Taylor-Formel.*

Beispiele

15.5 Definition. Landau-Symbole O und o .

15.6 Satz. *Hinreichendes Kriterium für lokale Extrema.*

15.7 Definition. Taylor-Reihen.

Gegenbeispiel, daß die Taylor-Reihe im allgemeinen NICHT die gegebene Funktion darstellt.

15.8 Satz. *Hat f eine Potenzreihenentwicklung, so ist die Potenzreihe die Taylor-Reihe.*

Bsp.: Geometrische Reihe.