

Analysis I

Probeklausur

Arbeitszeit: 120 Min.; Hilfsmittel: Skriptum, Übungsblätter

Aufgabe 1

Zeichnen Sie die Menge

$$M := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2, \operatorname{Re} z \leq (\operatorname{Im} z)^2\} \subset \mathbb{C}.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Dualbruchentwicklung der Dezimalzahl $0,7$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3

Beweisen Sie mit vollständiger Induktion

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(5 Punkte)

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Partialbruchentwicklung von

$$\frac{x-1}{(x+1)(x+2)}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 5

Zeichnen Sie die Menge $B := \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| < 2\}$ auf der reellen Zahlengeraden und bestimmen Sie $\sup(B)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 6

Entscheiden Sie, ob folgende Limiten existieren, und berechnen Sie gegebenenfalls den Limes:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n-n^2}$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} i^n$ ($i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit)

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\sum_{k=0}^n 1/2^k\right)$.

(4 Punkte)

Aufgabe 7

Entscheiden Sie, ob folgende Reihen konvergieren bzw. absolut konvergieren:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n}{2^n}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n(\pi n)}{2 \cdot n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{10n^2 - n - 1}$

(4 Punkte)

Aufgabe 8

Skizzieren Sie die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} \cos(\pi/x) & x \in]0, 1[\\ 0 & x = 0. \\ -1 & x = 1 \end{cases}$$

Entscheiden Sie für die Punkte 0 und 1, ob f dort stetig ist. Die Antwort ist zu begründen.

(4 Punkte)

Aufgabe 9

Es sei $f : [0, \infty[\rightarrow [0, 1]$ eine monoton wachsende Funktion. Beweisen Sie, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \in [0, 1]$$

existiert, und stellen Sie diesen Limes mithilfe eines geeigneten Supremums dar.

(4 Punkte)

Abgabetermin: Montag, 04.01.2010 (in der Vorlesung).

Bitte notieren Sie die Nr. Ihrer Tutorübungsgruppen auf der Abgabe.

Gesamtzahl: 36 Punkte

Zum Bestehen wären ca. 17 Punkte nötig.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!