(H1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ beschränkte Folge.

$$\limsup_{n\to\infty} (-a_n) \underset{\text{Def.}}{=} \lim_{k\to\infty} \sup_{n\geq k} (-a_n) \overset{(*)}{=} \lim_{k\to\infty} \Big(- \inf_{n\geq k} a_n \Big) \underset{\substack{\text{Rechenregeln für} \\ \text{Grenzwerte}}}{=} - \lim_{k\to\infty} \inf_{n\geq k} a_n = - \liminf_{n\to\infty} a_n$$

(*) $\sup_{n\geq k} (-a_n) = - \inf_{n\geq k} a_n$

(i) „$\leq$" Setze $c := \sup_{n\geq k} (-a_n)$. Dann $\forall n\geq k: (-a_n) \leq c$

Also auch $\forall n\geq k: a_n \geq -c$

Damit $\inf_{n\geq k} a_n \geq -c$. ✓

(ii) „$\geq$" analog.

(H2) a) $a_n := \begin{cases} n, & n \text{ gerade} \\ \sqrt[n]{n}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$

Damit: (i) $\sup_{n\geq k} a_n \geq k-1 \Rightarrow \underline{\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty}$

(ii) $\inf_{n\geq k} a_n \underset{\sqrt[n]{n}\geq 1}{\geq} 1 \Rightarrow \underline{\liminf_{n\to\infty} a_n \geq 1}$

Da $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 1$ (vgl. VL)

folgt $\liminf_{n\to\infty} a_n = 1$

Da liminf und lim sup nicht übereinstimmen, existiert der limes nicht. (Satz 6.12)

b) (VL) $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$

Damit $|a_n| = |(-1)^n| \frac{n^2}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, also $\lim_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = 0$.

(Satz 6.12).

(H3) a) $|a_n| = \frac{|1+i|^n}{2^n} = \Big(\underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{2}}}_{<1}\Big)^n$

Somit $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2})^{-n}}_{\text{geometrische Reihe}} < \infty$. Also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut nach dem Majoranten-Kriterium.

b) (i) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$. Dann $|a_n| \geq \frac{1}{n}$. Da $\sum_{n=1}^{k} |a_n| \geq \underbrace{\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}}_{\text{harmonische Reihe}} \to \infty$, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht absolut. (Satz 7.6)

(ii) $a_n = (-1)^n \tilde{a}_n$ mit $\tilde{a}_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$. Da $\tilde{a}_n \to 0$, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach Satz 7.7.

(Leibniz-Kriterium)

c) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+2}} \geq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{n+2}} \geq \frac{1}{2} \frac{1}{n+2}$

Somit $\sum_{k=1}^{n} a_k \geq 1/2 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}}_{\text{harm. Reihe}} \to \infty$. Damit: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert nicht.

d) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$. Dann $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1 \left(= -\liminf_{n\to\infty} a_n \right)$. Korollar 7.4. $\Rightarrow$ Keine Konvergenz der Reihe.

e) $a_n = \frac{q^n}{1-q^n}$: (i) $|q| < 1$. Dann $|1-q^n| < M$ für geeignetes $M > 0$ (denn $|q|^n \to 0$)

Also $\left| \frac{q^n}{1-q^n} \right| < M \cdot |q|^n$

Damit $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq M \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |q|^k < \infty$. Majorantenkriterium $\Rightarrow$ absolute Konvergenz

geometrische Reihe

(ii) $|q| > 1$. Dann $a_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\left(\left(\frac{1}{q}\right)^n \to 0, \text{ denn } |q| > 1 \right)$

Also keine Konvergenz (Korollar 7.4.)

f) $a_n = \begin{cases} 1/n^2, & n \text{ gerade}, \\ 1/2^n, & \text{sonst}. \end{cases}$

$\exists K \in \mathbb{N}: \forall n \geq K: n^2 \leq 2^n$ (denn $\sqrt[n]{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$)

Damit $|a_n| \leq \frac{1}{n^2}$.

Also $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$. Majorantenkriterium $\Rightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konv. absolut.

g) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ Keine Konvergenz. (Satz 7.6.)

(H4) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ mit $b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$ (✱)

Z.Z.: Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \iff$ Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (⊗)

Bew.: Aus (✱) folgt: $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq n_1 : \left| \frac{a_k}{b_k} - L \right| \leq 1$

„$\Leftarrow$"

$\Rightarrow \exists\, M > 0,\ n_1 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq n_1 : |a_k| \leq M \cdot b_k$ (+)

Damit: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \underbrace{\sum_{n=1}^{n_1-1} |a_n|}_{\substack{\leq C > 0 \\ \text{endlich viele} \\ \text{Summanden}}} + \sum_{n=n_1}^{\infty} |a_n| \leq C + M \underbrace{\sum_{n=n_1}^{\infty} b_k}_{\substack{< \infty \\ \text{n.V.}}} < \infty$

„$\Rightarrow$" O.B.d.A. $L > 0$ (sonst betrachte $\tilde{a}_n = -a_n$, $n \in \mathbb{N}$)

(✱) $\Rightarrow \exists\, n_2 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq n_2 : a_k > 0$

Also $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n \geq n_2}} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{L} \Rightarrow \exists\, n_3 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq n_3 : b_k \leq M \cdot a_k$ (++)

Damit: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \underbrace{\sum_{n=1}^{n_3-1} b_n}_{\substack{= C < \infty \\ \text{endlich viele Summanden}}} + \sum_{n=n_3}^{\infty} b_k \leq C + M \underbrace{\sum_{n=n_3}^{\infty} a_k}_{\substack{< \infty \\ \text{n.V.}}} < \infty$

a) Es gilt: $\frac{a+n^k}{b+n^m} \simeq n^{k-m}$

(i) $m \leq k$: Keine Konvergenz, denn $\frac{a+n^k}{b+n^m} \not\to 0$.

(ii) $k-m = -1$: Keine Konvergenz, nach (⊗), denn $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$

(iii) $k-m \leq -2$: Konvergenz, nach (⊗), denn $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} < \infty$ für $e \geq 2$

b) Es gilt: $\frac{1}{n^{1/k + 1/n}} = n^{-1/k} \cdot n^{-1/n} \simeq n^{-1/k}$, denn $n^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

(H5) (3p)

$x_1 = 1\ ,\ x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$ $\quad (\Rightarrow x_2 = 2\ ,\ x_3 = \frac{3}{2}\ ,\ x_4 = \frac{5}{3}, \ldots)$

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{n-1}}} = 1 + \frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+1} = \frac{2 \cdot x_{n-1} + 1}{x_{n-1}+1} \quad (*)$$

Klar: $x_n > 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(i) zeige: $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist mon. fallend:

$$x_{2n+2} \overset{(*)}{=} \frac{2x_{2n}+1}{x_{2n}+1} \overset{!}{\leq} x_{2n} \iff 2x_{2n}+1 \leq x_{2n}^2 + x_{2n}$$

$$\iff x_{2n}^2 - x_{2n} - 1 \geq 0 \iff x_{2n} \geq g := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ und}$$

$$x_{2n} \leq \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Zeige also: $x_{2n} \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61$ mit Induktion:

I.A: $n=1$: $x_2 = 2 \geq 1.61 \quad (\checkmark)$.

I.S $n \to n+1$: $x_{2n+2} \overset{(*)}{=} \frac{2 \cdot x_{2n}+1}{x_{2n}+1} \overset{!}{\geq} 1.61$

$\iff 2x_{2n} + 1 \geq 1.61\, x_{2n} + 1.61$

$\iff x_{2n} \geq \frac{0.61}{0.39} = 1.51$ gilt nach I.V. $(\checkmark)$.

(i) zeige: $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ist mon. wachsend.

Analog.

$\Rightarrow x^{(1)} := \lim_{n\to\infty} x_{2n}$ und $x^{(2)} := \lim_{n\to\infty} x_{2n+1}$ exist. und

$$x^{(1)} = \frac{2x^{(1)}+1}{x^{(1)}+1}\ ,\quad x^{(2)} = \frac{2x^{(2)}+1}{x^{(2)}+1} \Rightarrow x^{(1)} = x^{(2)} = g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(da $x_n \in (1,2)$.)