

Analysis I

Blatt 6

Homepage:

http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lsviv/analysis1/ana_I.0910.html

Tutorübungen:

Aufgabe 1

Entscheiden Sie für die folgenden Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ob sie konvergieren, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

a) $a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}$ für $a \geq b \geq c > 0$;

b) $a_n = \left(\frac{4+3i}{5}\right)^n$;

c) $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$.

Aufgabe 2

Zwei Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ heißen asymptotisch gleich (in Zeilen $a_n \simeq b_n$ für $n \rightarrow \infty$), falls $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ gilt.

Zeigen Sie für $n \rightarrow \infty$:

a) $n^3 \simeq n^3 + 3n^2$.

b) $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \simeq \frac{1}{n^2}$.

c) Für ein Polynom $p(x) = \sum_{k=0}^m c_k x^k$ vom Grade $m \in \mathbb{N}$ gilt $p(n) \simeq c_m n^m$.

Aufgabe 3

a) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = (1 + 1/n)^{n+1}$ monoton fallend und beschränkt ist.

(Hinweis: Bernoulli-Ungleichung!)

b) Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$ existieren und übereinstimmen.

Aufgabe 4 Konvergenz von Mitteln:

Einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ordnet man die Folge $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Mittel mit

$$m_n := \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

zu.

- Zeigen Sie, dass aus $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{C}$ folgt, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = a$ gilt.
- Geben Sie ein Beispiel an, wo $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergiert und $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

Hausaufgaben:

H1:

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine \mathbb{C} -wertige Folge, die gegen $a \in \mathbb{C}$ konvergiert. Zeigen Sie anhand der Definition der Konvergenz:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |a|$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{a}_n = \bar{a}$;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(a_n) = \operatorname{Re}(a)$.

H2:

Entscheiden Sie für folgende Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ob sie konvergieren, und berechnen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

- $a_n = \frac{n^3 + 3n + 7}{3n^3 + n^2}$;
- $a_n = \frac{x^n - n}{x^n + n}$ abhängig von $x > 0$;
- $a_n = \sqrt[n]{n + M}$ abhängig von $M > 0$;
- $a_n = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n k$;
- $a_n = \frac{i^n}{n+i}$;
- $a_1 := 3$ und $a_{n+1} := 2a_n - 1$ für $n \geq 1$;
- $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

(Tipp: Es darf auf Ergebnisse früherer Blätter zurückgegriffen werden!).

H3:

Betrachten Sie die Zahlen

$$a_n = \sqrt{n + 1000} - \sqrt{n}, \quad b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, \quad c_n = \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n}.$$

Zeigen Sie:

- Für $1 \leq n < 10^6$ gilt $a_n > b_n > c_n$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1/2$.
- Entscheiden Sie, ob $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.
- Bestimmen Sie b_n für $n = 10^{60}$ auf 10 Dezimalstellen.

(Hinweis: $a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$ ist nützlich!).

H4: Division durch Multiplikation

Sei $c > 0$ gegeben.

Wähle einen Startwert $x_1 \in]0, 2/c[$ und definiere rekursiv

$$x_{n+1} := x_n(2 - cx_n) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n \geq 2}$ monoton wächst und beschränkt ist.
- Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1/c$ gilt.
- Für $c \in]0, 2[$ und $x_1 := 1$ überprüfe man

$$x_n = \frac{1 - (1 - c)^{2^{(n-1)}}}{c} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Man vergleiche damit die relativen Abstände von x_n und x_{n+1} vom Limes $1/c$ explizit.

H5*:

Die **unendlich iterierte Wurzel**

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

wird definiert als Limes der wie folgt rekursiv definierten Folge

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \sqrt{1 + a_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und durch 2 beschränkt ist.

b) Berechnen Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

H6*: Konvergenz verallgemeinerter Mittel

Sei $(c_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine $]0, \infty[$ -wertige, streng monoton wachsende Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty$.

Zeigen Sie für eine konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{c_n} \sum_{k=1}^n (c_k - c_{k-1}) a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Abgabetermin: Bis Montag, 23.11.2009, 14.00 Uhr, im Briefkasten am Eingang zum Mathematik-Gebäude, der zu Ihrer Übungsgruppe gehört.