(H1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{C} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_\varepsilon : |a_n - a| \leq \varepsilon$. (*)

a) Es gilt $||a| - |b|| \leq |a-b|$ für $a, b \in \mathbb{C}$.

(Bew: 1) $|a| \leq |a-b| + |b|$ also $|a| - |b| \leq |a-b|$
2) $|b| \leq |b-a| + |a|$ also $|b| - |a| \leq |a-b|$)

Δ-Ungl.

Damit: $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|$

Also nach (*): $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_\varepsilon : ||a_n| - |a|| \leq \varepsilon$ (insb. mit dem <u>gleichen</u> n_ε wie in (*))

b) Es gilt: $|\bar{a}_n - \bar{a}|^2 = |\overline{(a_n - a)}|^2 = |a_n - a|^2$, denn $|\bar{z}| = |z|$

Also nach (*): $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_\varepsilon : |\bar{a}_n - \bar{a}| \leq \varepsilon$ (mit dem gleichen n_ε)

c) Es gilt: $|\mathrm{Re}(a_n) - \mathrm{Re}(a)|^2 \leq |\mathrm{Re}(a_n - a)|^2 + |\mathrm{Im}(a_n - a)|^2 = |a_n - a|^2$

Also wie in a), b): Konvergenz von $\mathrm{Re}(a_n)$ gegen $\mathrm{Re}(a)$ mit gleichem n_ε.

(H2) a) $a_n = \dfrac{n^3 + 3n + 7}{3n^3 + n^2} = \dfrac{1 + \overbrace{3/n^2}^{\to 0} + \overbrace{7/n^3}^{\to 0}}{3 + \underbrace{1/n}_{\to 0}} \xrightarrow[n\to\infty]{(6.5)} 1/3$

nach (6.3.1.), (6.5)

b) $x > 1$: $a_n = \dfrac{x^n - n}{x^n + n} = \dfrac{1 - \overbrace{n/x^n}^{\to 0}}{1 + \underbrace{n/x^n}_{\to 0}} \xrightarrow[n\to\infty]{(6.5)} 1$

nach (6.3.3)

$x \leq 1$: $a_n = \dfrac{\overbrace{\left(\frac{x^n}{n}\right)}^{\to 0} - 1}{\underbrace{\left(\frac{x^n}{n}\right)}_{\to 0} + 1} \xrightarrow[n\to\infty]{(6.5)} -1$

nach (6.3.1), (6.5), denn $|x^n| \leq 1$ für $|x| \leq 1$

c) $a_n = \sqrt[n]{n + M}$
$$\begin{cases} a_n \leq \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n} & \text{für } n \geq M \\ a_n \geq \sqrt[n]{n} & \text{für } n \geq 1 \end{cases}$$

Nach (6.6.3.) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (6.3.2), da $\sqrt[n]{2} \to 1$ $(1 \leq \sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{n}, \ n \geq 2)$

d) $a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{n^2+n}{n^2}}_{\to 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$

wie in a), b)

e) $0 \le |a_n| = \left|\frac{i^n}{n+i}\right| = \frac{|i^n|}{|n+i|} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \le \frac{1}{\sqrt{2}\cdot n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Also nach (6.6.3) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

f) $a_1 := 3$ und $a_{n+1} := 2a_n - 1$. a_n ist nicht beschränkt, denn $a_n = 2^{(n+1)} - 1$
(Beweis durch Induktion)

$\underset{\text{Lemma 6.4}}{\Rightarrow}$ a_n ist nicht konvergent.

g) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

wie in a), b)

(H3) a) Für $1 \le n \le 10^6$ gilt: $1000 = 10^3 = \sqrt{10^6} \ge \sqrt{n} \ge \sqrt{n} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{n}{10^6}}}_{\le 1} = \frac{n}{1000}$ (*)

$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{n+1000} - \sqrt{n} \ge \sqrt{n + \underbrace{\sqrt{n}}_{\le 1000}} - \sqrt{n}}_{\Rightarrow\ a_n \ge b_n} \overset{(*)}{\ge} \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n}$

$\Rightarrow b_n \ge c_n$

$\left(a_n = \sqrt{n+1000} - \sqrt{n},\quad b_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n},\quad c_n = \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n} \right)$

b) Für $x_n \ge 0$ gilt: $\sqrt{n+x_n} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+x_n} - \sqrt{n})(\sqrt{n+x_n} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+x_n} + \sqrt{n}}$

$= \frac{n + x_n - n}{\sqrt{n+x_n} + \sqrt{n}} = \frac{x_n}{\sqrt{n+x_n} + \sqrt{n}}$ (+)

(1) $a_n = \sqrt{n+x_n} - \sqrt{n}$ mit $x_n = 1000$ für $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow 0 \le a_n \overset{(+)}{\le} \frac{1000}{\sqrt{n+1000} + \sqrt{n}} \le \frac{1000}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ analog zu (6.3.1), (6.5)

(2) $b_n = \sqrt{n+x_n} - \sqrt{n}$ mit $x_n = \sqrt{n}$

$b_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+\sqrt{n}}} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$

c) $c_n = \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\cdot\underbrace{\left(\sqrt{\frac{1001}{1000}} - 1\right)}_{>0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ (bestimmte Divergenz, Grund, denn für $n \geq \frac{M^2}{\left(\sqrt{\frac{1001}{1000}}-1\right)^2}$ gilt $c_n \geq M$)

d) $b_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$

Nach b) $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}$

Für $n = 10^{60}$ ist $b_n = \frac{10^{30}}{\sqrt{10^{60}+10^{30}}+10^{30}} = \frac{10^{15}}{\sqrt{10^{30}+1}+10^{15}}$

Nun $\left|\frac{1}{2} - \frac{10^{15}}{\sqrt{10^{30}+1}+10^{15}}\right| = \left|\frac{\sqrt{10^{30}+1} - 10^{15}}{2\left(\sqrt{10^{30}+1}+10^{15}\right)}\right| = \frac{1}{2\left(\sqrt{10^{30}+1}+10^{15}\right)^2}$

$\leq \frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(2\cdot 10^{15}\right)^2} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{10^{30}} \leq \frac{1}{10^{11}}$

Also stimmen $b_{10^{60}}$ und $1/2$ auf 10 Dezimalstellen überein!

(H4) $c>0$; $x_1 \in (0, \frac{2}{c})$; $x_{n+1} = x_n(2 - cx_n)$

a) 1) $(x_n)_{n\geq 2}$ beschränkt (i) $x_{n+1} = x_n(2-cx_n) \leq 1/c$

$\Leftrightarrow\ 2cx_n - c^2x_n^2 \leq 1$

$\Leftrightarrow\ x_n^2 - \frac{2}{c}x_n + \frac{1}{c^2} = (x_n - \frac{1}{c})^2 \geq 0$ ✓

Also $x_n \leq 1/c$ für $n = 2,3,4,\dots$
(Für $n=1$ kann dies nicht gelten!)

(ii) $x_n > 0$ per Induktion

$\underline{\text{IV}}$: $x_1 > 0$ ✓

$\underline{\text{IS}}$: $x_{n+1} = \underbrace{\underset{\underset{\text{IA}}{>0}}{x_n}\ \underset{\underset{\text{nach (i)}}{\leq 1/c}}{(2 - cx_n)}}_{>0} > 0$ ✓

Also $0 < x_n \leq 1/c$ für $n = 2,3,4,\dots$

2) $(x_n)_{n\geq 2}$ wachsend: $x_{n+1} = x_n(2-cx_n) \geq x_n \overset{x_n>0}{\Leftrightarrow} 2 - cx_n \geq 1 \Leftrightarrow x_n \leq 1/c$ ✓

b) $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent nach a). Damit für $x := \lim_{n\to\infty} x_n$: $x = x(2-cx)$

$\Rightarrow \quad x = \frac{1}{c}$

c) $1 < \frac{3}{c}$, Voraussetzungen erfüllt $x_n \to \frac{1}{c}$ $(c \in (0,2))$

Beh.: $x_n = \frac{1}{c}\left(1-(1-c)^{2^{(n-1)}}\right)$

Induktion: IV $(n=1)$ $1 = x_1 = \frac{1}{c}\left(1-(1-c)^{2^0}\right) = \frac{1}{c}\cdot c = 1$ ✓

IS $(n \Rightarrow n+1)$ $x_{n+1} = x_n(2-cx_n)$

$= \frac{1}{c}\left(1-(1-c)^{2^{n-1}}\right)\left(2-\left(1-(1-c)^{2^{n-1}}\right)\right)$

$= \frac{1}{c}\left(1-(1-c)^{2^{n-1}}\right)\left(1+(1-c)^{2^{n-1}}\right)$

$= \frac{1}{c}\left(1^2-\left((1-c)^{2^{n-1}}\right)^2\right) = \frac{1}{c}\left(1-(1-c)^{2^n}\right)$ ✓

relativer Fehler: $r_n = \dfrac{\frac{1}{c}-x_n}{\frac{1}{c}} = 1-cx_n = (1-c)^{2^{(n-1)}}$

$r_{n+1} = \ldots\ldots \quad (1-c)^{2^n}$

Damit $r_{n+1} = r_n^2 = (1-c)^{2^n}$, also quadratische Konvergenz!

(145) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n}$

a) (i) monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ (*) Beweis von (*) per Induktion

IV: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt{1+1}}{1} \geq 1$ ✓

IS $(n-1 \Rightarrow n)$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{1+a_n}}{a_n} = \frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{\sqrt{1+a_n}}{a_{n-1}} \geq$ ($a_n \geq a_{n-1}$ (IA) + Monotonie von $\sqrt{\cdot}$) $\frac{a_{n-1}}{a_n}\,\frac{\sqrt{1+a_{n-1}}}{a_{n-1}}$

$= \frac{a_{n-1}}{a_n}\,\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$ ✓

(ii) beschränkt: nach (i) $a_n \geq 1$.

Nun $a_n \leq 2$ per Ind.: IV: $a_1 = 1 \leq 2$ ✓

IS: $a_{n+1} = \sqrt{1+a_n} \leq \sqrt{1+2} \leq 2$ ✓

b) Nach a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Also gilt für $a := \lim_{n\to\infty} a_n$: $a = \sqrt{1+a}$

$\Rightarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(HG*) Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist gegen $a^* := \lim_{n\to\infty} a_n$, gilt:

(i) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall K \geq K_\varepsilon \ : \ |a_K - a^*| \leq \varepsilon/2$ (*)

(ii) $\exists M > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} : \ |a_n| \leq M$ (**)

Somit: $r_n := \left| \frac{1}{c_n} \sum_{K=1}^{n} \left[(c_K - c_{K-1}) \cdot a_K \right] - a^* \right|$

$$\leq \left| \frac{1}{c_n} \sum_{K=1}^{n} \left[(c_K - c_{K-1})(a_K - a^*) \right] \right| + \frac{c_0}{c_n} |a^*|$$

Teleskopsumme

$$\leq \frac{1}{c_n} \sum_{K=1}^{K_\varepsilon} \left[|c_K - c_{K-1}| \cdot \underbrace{|a_K - a^*|}_{\leq M \ (**)} \right] + \frac{c_0}{c_n} |a^*|$$

$$+ \frac{1}{c_n} \sum_{K=1+K_\varepsilon}^{n} |c_K - c_{K-1}| \cdot \underbrace{|a_K - a^*|}_{\leq \varepsilon/2 \text{ nach } (*)}$$

Teleskop-summe $c_K \geq c_{K-1}$

$$\leq \frac{1}{c_n} (c_{K_\varepsilon} - c_0) \cdot M + \frac{c_0}{c_n} \cdot |a^*| + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{c_n} (c_n - c_{K_\varepsilon})}_{\leq 1}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{c_n} \left(|c_{K_\varepsilon} - c_0| \cdot M + c_0 \cdot |a^*| \right)$$

Nun wähle $n_\varepsilon^* \geq K_\varepsilon$ so daß $\frac{1}{c_n} \left(|c_{K_\varepsilon} - c_0| \cdot M + c_0 \cdot |a^*| \right) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ gilt für alle $n \geq n_\varepsilon^*$.

(Geht da $c_n \to \infty$ und c_n streng monoton wachsend.)

Also: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon^* \quad \forall K \geq n_\varepsilon^* \ : \ |r_K| \leq \varepsilon$ ✓

Und damit $\frac{1}{c_n} \sum_{K=1}^{n} (c_K - c_{K-1}) a_K \to a^*$