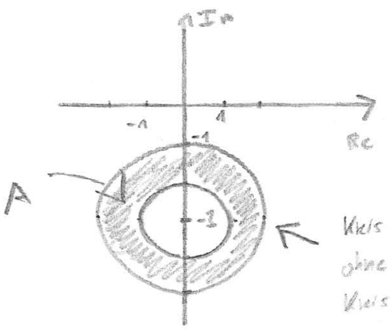
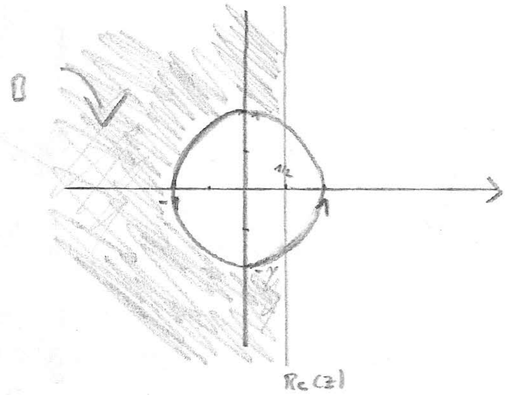
(H1) a) $\{ z \in \mathbb{C} : 1 \le |z+3i| \le 2 \} =: A$ b) $\{ z \in \mathbb{C} : |z| \ge 1 \, , \, |Re(z)| \le 1/2 \} =: B$



Kreis mit Radius 2 um $-3i$
ohne
Kreis mit Radius 1 um $-3i$



(H2) a) $z = \frac{2-i}{2-3i} = \frac{(2-i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{1}{13}(4-2i+6i+3) = \left(\frac{7}{13}\right) + \left(\frac{4}{13}\right) i$, $|z| = \frac{1}{13}\sqrt{65} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}$.

$\frac{7}{13}$: Re(z), $\frac{4}{13}$: Im(z)

b) $z^2 = i$ (VL) $\Rightarrow$ zwei Lösungen

$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot i$ | $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot i$, $|z_1| = |z_2| = 1$

$Re(z_1)$, $Im(z_1)$, $Re(z_2)$, $Im(z_2)$

(H3) (*) $z^3 = \bar{z}$, $z = ?$

$z^3 = \bar{z} \Rightarrow |z^3| = |\bar{z}|$. D.h. z, welches (*) erfüllt, muß auch $|z|^3 - |z| = 0$ erfüllen.

$|z^3| = |z|^3$, $|\bar{z}| = |z|$

$\Rightarrow |z| = 0$ oder $|z| = 1$ $\left(0 = |z|^3 - |z| = |z| (|z|^2 - 1) \right)$

Fall 1) $|z| = 0 \Rightarrow z = 0$ und $z_1 = 0$ erfüllt (*).

Fall 2) $|z|^2 = 1$, d.h. $z = x + iy$ mit $x^2 + y^2 = 1$

$$z^3 = (x+iy)^2 (x+iy) = (x^2 + 2ixy - y^2)(x+iy) = x^3 + 2ix^2y - xy^2 + ix^2y - 2xy^2 - iy^3$$

$$\bar{z} = x - iy$$

Also:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \overset{!}{=} 1 & (1) \\ x^3 - 3xy^2 \overset{!}{=} x & (2) \\ -y^3 + 3x^2y \overset{!}{=} -y & (3) \end{cases}$$

(1) in (2): $x^3 - 3x(1-x^2) = x \Leftrightarrow x^3 - 3x + 3x^3 = x \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1, x = -$

(1) in (3): ..... $\Rightarrow y = 0, y = 1, y = -1$

(1) $\Rightarrow$ $z_2 = i$, $z_3 = 1$, $z_4 = -i$, $z_5 = -1$

$z_2, -, z_5$ erfüllen (*) !

(H4) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $1+z_1+z_2=0$, $|z_1| = |z_2| = 1$.

$1+z_1+z_2 = 0 \Rightarrow z_2 = -1-z_1$

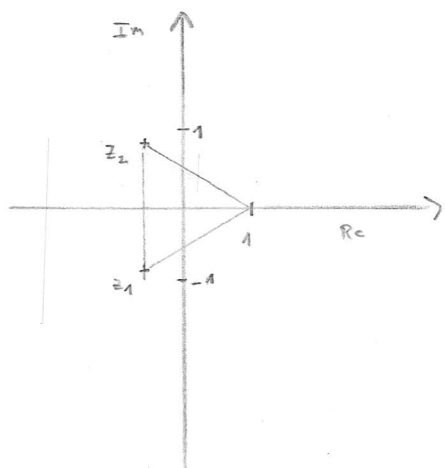
D.h. für $z_1 = x+iy$ folgt $z_2 = -(1+x) - iy$

Da $|z_1| = |z_2| = 1$, gilt $1 = \underbrace{\overbrace{x^2+y^2}^{①} = (1+x)^2+y^2}_{②}$

$② \Rightarrow x^2+y^2 = (1+x)^2+y^2 \Rightarrow x^2 = (1+x)^2 \Rightarrow x = -1/2$

$①$ und $x = -1/2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{4} + y^2 \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Also $z_1 = -1/2\,(1+\sqrt{3}\,i)$, $z_2 = -1/2\,(1-\sqrt{3}\,i)$



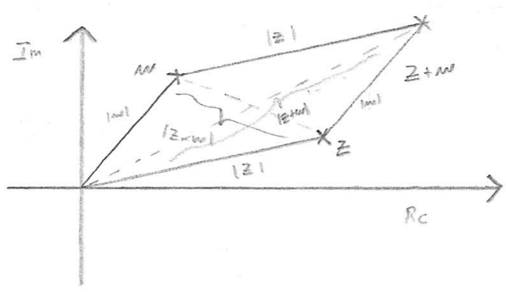
$|z_1 - z_2| = |-\sqrt{3}\,i| = \underline{\sqrt{3}}$

$|z_1 - 1| = \left|-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right| = \left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}\right)^{1/2} = \underline{\sqrt{3}}$

$|z_2 - 1| = \left|-\frac{3}{2} + \sqrt{3}/_2\,i\right| = \underline{\sqrt{3}}$

gleichseitiges Dreieck

(H5)



Die Summe der Längen der Diagonalen eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Seitenlängen.

Setze $z = a+ib$, $w = c+id$.

Dann
$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = (a+c)^2 + (b+d)^2 + (a-c)^2 + (b-d)^2$$
$$= a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bd + d^2 + a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bd + d^2$$
$$= 2\,(a^2+b^2+c^2+d^2) = 2\,(|z|^2 + |w|^2) \quad \checkmark$$

(H6)(*) $a = n^2+m^2 = |n+im|^2$, $b = p^2+q^2 = |p+iq|^2$ mit $n,m,p,q \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow a \cdot b = |n+im|^2 \cdot |p+iq|^2 = |(n+im)\cdot(p+iq)|^2 = |(np-mq) + i\,(mp+nq)|^2$$
$$= |\underbrace{np-mq}_{\in \mathbb{Z}}|^2 + |\underbrace{mp+nq}_{\in \mathbb{N}}|^2 \quad \checkmark$$

(H7)[8] $A, B, G \in \mathbb{G}$

Baum A, Baum B, Galgen

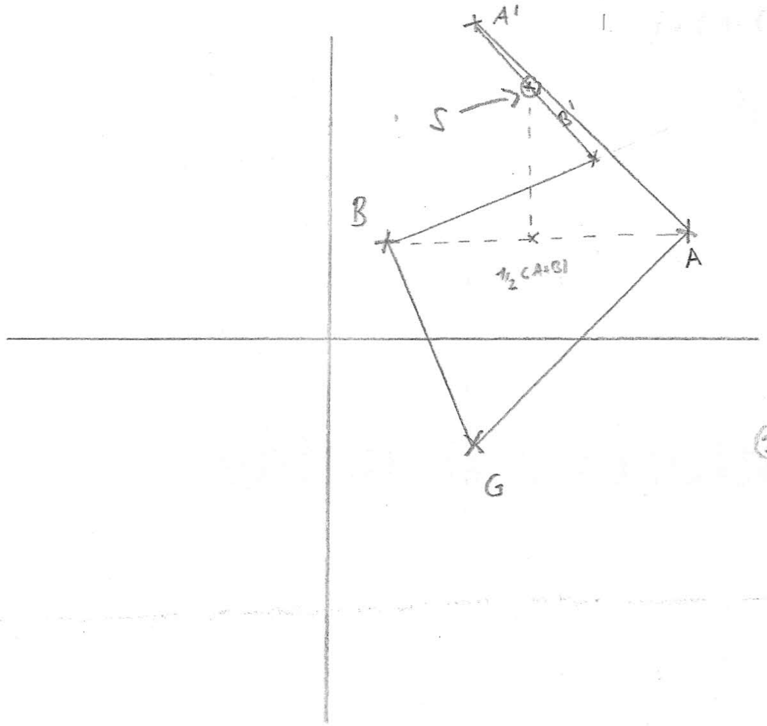
Da $\begin{cases} \cdot i : \text{Drehung um } 90° \text{ nach links} \\ \cdot (-i) : \text{Drehung um } 90° \text{ nach rechts} \end{cases}$

ergibt sich aus den Anweisungen

$$A' = A + i \cdot (A-G), \quad B' = B - i \cdot (B-G)$$

Damit $S = \frac{1}{2}(A'+B') = \frac{1}{2}(A+B) + \frac{1}{2} i (A-B)$

Position von G: irrelevant für Schatz!



Insbesondere:

Steht man in B, läuft man bis zur Mitte von A und B (1), dreht sich dann um 90° nach links und legt dann nochmal die gleiche Strecke zurück. (2)

(1): $B + \underline{\frac{1}{2}(A-B)}$

(2) $\frac{1}{2}(A+B) + \underline{\frac{1}{2} i (A-B)}$