(H1) $\{x \in \mathbb{R} : \left| |x| - 5 \right| \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq |x| - 5 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : 4 \leq |x| \leq 6\}$

(1P) $= \{x \in \mathbb{R} : -6 \leq x \leq -4\} \cup \{x \in \mathbb{R} : 4 \leq x \leq 6\}$

(H2) Nein!

(1P) Zu $a = 5$ existiert kein $b \in \mathbb{Z}$ mit $a \cdot b = 1$ (K5) (Körperaxiom zur Inversenbildung)

Es müßte $b = \frac{1}{5}$ sein, aber $\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$.

(H3) K angeordneter Körper ; $x, y, u, v \in K$:

(5P) a) $x > 0 \iff x^{-1} > 0$

„$\Rightarrow$" Sei $x > 0$ und gelte nicht $x^{-1} > 0$.
Nach dem Anordnungsaxiom (A1) muß also $x^{-1} = 0$ oder $x < 0$ gelten.

1) $x > 0$, $x^{-1} = 0$. Dann $\underset{\text{nach Def.}}{1 =} x \cdot x^{-1} \underset{(3.3.5)}{=} x \cdot 0 = 0$ ↯

2) $x > 0$, $x^{-1} < 0$. Dann: $0 \underset{(3.3.5)}{<} \underset{>0}{(-x^{-1})} \cdot \underset{>0}{x} \underset{b)}{=} -(\underbrace{x^{-1} \cdot x}_{=1}) = -1$ ↯

[Auf saubere Argumentation achten!]

„$\Leftarrow$" Zeige hierzu $(x^{-1})^{-1} = x$ (für $x > 0$) und wende a) mit x^{-1} anstelle von x an.

Per Def. ist $(x^{-1})^{-1}$ das Element z mit

$$x^{-1} z = 1.$$

Kommutativität liefert $1 = x^{-1} \cdot z = z \cdot x^{-1}$.
Also ist x^{-1} das multiplikative Inverse von z. Eindeutigkeit der Inversen (3.2.4) liefert also $z = x$.

Also ist $(x^{-1})^{-1} = x$.

Der Beweis von „$\Rightarrow$" liefert nun:

$$x^{-1} > 0 \Rightarrow (x^{-1})^{-1} = x > 0.$$ ✓

b) $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y$

Es gilt: $\underset{\text{Def. von } -x}{(x + (-x)) \cdot y =} 0 \cdot y \overset{(3.3.5)}{=} 0$

Mit (K2) / Distributivität folgt: $x \cdot y + (-x) \cdot y = 0$.
Also $(-x) \cdot y$ additives Inverses von $x \cdot y$. Eindeutigkeit der Inversen (3.3.2) liefert $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y$.

c) $x > y > 0,\ u > v > 0 \Rightarrow x \cdot u > y \cdot v.$

Nach 3.7.2 gilt: $x > y > 0,\ u > v > 0 \Rightarrow x \cdot u > y \cdot u$

und $x > y > 0,\ u > v > 0 \Rightarrow u \cdot y > v \cdot y$

Also folgt mit der Kommutativität der Multiplikation (K3) und der Transitivität von > (3.7.3)

$x > y > 0,\ u > v > 0 \Rightarrow x \cdot u > y \cdot v$

d) $|xy^{-1}| = |x| \cdot |y|^{-1}$.

Nach (3.9.2) gilt $|xy^{-1}| = |x| \cdot |y^{-1}|$. Es bleibt somit $|y^{-1}| = |y|^{-1}$ zu zeigen.

Nun ist $1 = |y \cdot y^{-1}| \underset{(3.9.2)}{=} |y| \cdot |y^{-1}|$. Also $|y^{-1}|$ multiplikative Inverse zu $|y|$.

Die Eindeutigkeit der Inverse ergibt $|y|^{-1} = |y^{-1}|$.

e) $x \cdot x \geq 0$

Fall 1: $x = 0$. Dann $x \cdot x = 0 \cdot 0 \geq 0$ ✓

Fall 2: $x > 0$. Dann $x \cdot x \underset{\text{Anordnungsaxiom (A2)}}{>} 0$ ✓

Fall 3: $x < 0$. Dann $x \cdot x \underset{\substack{x \cdot x \text{ add. Inverse} \\ \text{von } -(x \cdot x)}}{=} -(-(x \cdot x)) \underset{b)}{=} -((-x) \cdot x) \underset{(K3)}{=} -(x \cdot (-x))$

$\underset{b)}{=} (-x) \cdot (-x) \underset{\text{Fall 2}}{>} 0$, da $(-x) > 0$

(H4)

a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 2\} = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$

(1P) Es existiert weder Max, Min, Sup, Inf. Die Menge ist weder nach oben noch nach unten beschränkt.

b) $B = \{(-1)^n (1 - 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$.

$= \{0, 1/2, -2/3, 3/4, - \quad \}$

Behauptung: (i) $\sup B = 1$, (ii) $\inf B = -1$.

Beweis: (i) (α) 1 ist obere Schranke von B: $(-1)^n(1 - 1/n) \leq 1$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ ✓

(β) Es gibt keine kleinere obere Schranke: Sei $s < 1$ obere Schranke von B.

(2P) Dann existiert $m \in \mathbb{N}$ gerade mit $(-1)^m(1 - \frac{1}{m}) > s$. ↯

ist untere Schranke von B: $(-1)^n(1-1/n) \geq -1$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ ✓

(β) Es gibt keine größere untere Schranke: Sei $s > -1$ untere Schranke von B.
Dann ex. $m \in \mathbb{N}$ ungerade mit $(-1)^m(1-\frac{1}{m}) < s$ ↯

B hat kein Maximum, Minimum, da $1, -1 \notin B$.

c) $C = \{7\}$

$\operatorname{Max} C = \operatorname{Min} C = \sup C = \inf C = 7$ (7 ist obere und untere Schranke, die auch angenommen wird)

(1P)

(H5) $A, B \subset \mathbb{R}$, $A, B \neq \emptyset$, A, B nach oben beschränkt. Definiere

$$A \cdot B := \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$$

Zeigen Sie:

a) $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$

Hier reicht zu zeigen, daß $\sup B$ eine obere Schranke von A ist.
($\sup A$ ist die kleinste obere Schranke von A!)

(1P)

Es gilt: $\forall b \in B: b \leq \sup(B)$ und somit $\forall a \in A \subset B: a \leq \sup(B)$ ✓

b) $A \cup B \subset [0, \infty[\Rightarrow \sup(A \cdot B) = \sup(A) \cdot \sup(B)$

1) $\sup(A \cdot B) \leq \sup(A) \cdot \sup(B)$

Für alle $a \in A$ gilt $a \leq \sup A$ und für alle $b \in B$ gilt $b \leq \sup B$.

Also: $a \cdot b \leq \sup(A) \cdot \sup(B)$ f.a. $a \in A, b \in B$ (nach H3 c)) ⊕

Damit ist $\sup(A) \cdot \sup(B)$ obere Schranke für $A \cdot B$ und deshalb gilt $\sup(A \cdot B) \leq \sup(A) \cdot \sup(B)$. ✓

2) $\sup(A \cdot B) \geq \sup(A) \cdot \sup(B)$

Fix. $b \in B$. Dann ist $A \cdot \{b\} \subset A \cdot B$.

(2P)

Nach a) ist somit $\sup(A \cdot \{b\}) \leq \sup(A \cdot B)$.

Weiterhin ist $\sup(A \cdot \{b\}) = b \cdot \sup(A)$, also gilt

$$b \cdot \sup(A) \leq \sup(A \cdot B) \quad \text{f.a. } b \in B.$$

sup: kleinste obere Schranke

Da $b \leq \sup(B)$ ist, folgt nun

$$\sup\{b \cdot \sup(A) : b \in B\} \; (= \sup(A) \cdot \sup(B)) \leq \sup(A \cdot B)$$ ✓

c) $A = \{-1, 1\}$ $B = \{-1\}$. Dann $\sup(A) = 1$, $\sup(B) = -1$, $\sup(A \cdot B) = 1$. Aber $-1 \cdot 1 \neq 1$

(1P)

(H6)

(5P)

⌜Diese Aufgabe ist eine Zusatz-aufgabe!⌟

$0 < a < b$, definiere rekursiv:

$a_1 := a$, $b_1 := b$

$$a_{n+1} := H(a_n, b_n) = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \quad , \quad b_{n+1} := A(a_n, b_n) = \frac{a_n + b_n}{2}$$

a) Klar: $a_1 \cdot b_1 = a \cdot b$.

Weiterhin: $a_{n+1} \, b_{n+1} = \frac{2 a_n b_n}{a_n + b_n} \cdot \frac{a_n + b_n}{2} = a_n \cdot b_n$. f.a. $n \in \mathbb{N}$.

Vollständige Induktion ergibt: $a_n \cdot b_n = a \cdot b$ f.a. $n \in \mathbb{N}$. (+)

Weiterhin ist $a_n \leq b_n$ f.a. $n \in \mathbb{N}$ (Aufgabe 4).

Damit ist $\underset{(3.7.2)}{a_n^2 \leq} \; a_n \cdot b_n = a \cdot b$

und $\underset{(3.7.2)}{b_n^2 \geq} \; a_n \cdot b_n = a \cdot b$

(**)

Also folgt $a_n \leq \sqrt{a \cdot b} \leq b_n$ aufgrund der Monotonie der Wurzelfunktion:
$(0 < a < b \Rightarrow 0 < \sqrt{a} < \sqrt{b})$

b) $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{2 a_n b_n}{a_n + b_n} \underset{\text{Hauptnenner}}{=} \ldots\ldots = \frac{(b_n - a_n)^2}{2(a_n + b_n)}$

$$\leq \frac{(b_n - a_n)^2}{4\sqrt{a_n b_n}} \overset{(+)}{=} \frac{(b_n - a_n)^2}{4 \cdot \sqrt{ab}} \underset{b > a}{\leq} \frac{(b_n - a_n)^2}{4a}$$

Aufgabe 4: $\frac{a_n + b_n}{2} \geq \sqrt{a_n \cdot b_n}$

"Berechnung" von $\sqrt{2}$:

$n = 2$: $a_2 = 4/3$, $b_2 = 3/2$

$n = 3$: $a_3 = \frac{24}{17}$, $b_3 = \frac{17}{12}$

$n = 4$: $a_4 = \frac{816}{577}$, $b_4 = \frac{577}{408}$

Nach a) gilt $a_n < \sqrt{2} < b_n$. Somit folgt aus $|b_{n+1} - a_{n+1}| \leq 10^{-100}$ auch die Abschätzung $|a_n - \sqrt{2}| \leq 10^{-100}$

aus b) folgt für $a=1$

$$(b_{n+1} - a_{n+1}) \leq \frac{1}{4} (b_n - a_n)^2.$$

Induktion ergibt: $(b_{n+1} - a_{n+1}) \leq \frac{1}{4^n} (b_1 - a_1) = \frac{1}{4^n}.$

Wähle nun n so, daß $4^{-n} \leq 10^{-100}$, d.h. $-n \log(4) \leq -100 \cdot \log(10)$

$$\Leftarrow\!\!\!= n \geq 100 \cdot \frac{\log(10)}{\log(4)}$$

$$\Leftarrow\!\!\!= n \geq 167$$

Nachträge:

(*) H3 c) liefert die Aussage nur für $a < \sup(A)$, $b < \sup(B)$.

Aber für $a = \sup(A)$, $b < \sup(B)$ erhält man $a \cdot b < \sup(A) \cdot \sup(B)$

nach (3.7.2).

Genauso folgt $a \cdot b < \sup(A) \cdot \sup(B)$ für $a < \sup(A)$, $b = \sup(B)$.

Zu guter Letzt ist $a \cdot b = \sup(A) \cdot \sup(B)$ für $a = \sup(A)$, $b = \sup(B)$

(**) Die Monotonie der Wurzelfunktion folgt aus folgendem Widerspruchsbeweis:

Sei $0 < a < b$ und $\sqrt{a} \geq \sqrt{b} \geq 0$.

Dann gilt $a = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \underset{(3.7.2)}{\geq} \sqrt{b} \cdot \sqrt{a} \underset{(3.7.2)}{\geq} \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = b$ ↯