Hausaufgaben

(A1) Zeige mit Induktion:

(2p)
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Bew: • I.A $n=1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{4} 1^2 \cdot (1+1)^2 = 1 \quad \Rightarrow \checkmark.$$

• I.S. $n \mapsto n+1$:

zz: $$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot (n+2)^2$$

dazu: $$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{\text{IV.}}{=} \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 + (n+1)^3 =$$

$$= \frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot \left[n^2 + 4(n+1) \right] =$$

$$= \frac{1}{4}(n+1)^2 (n+2)^2 \quad \checkmark.$$

□

(A2) (a) $M := \{1,2,3\}$.

(1p) $\Rightarrow \mathcal{P}(M) = \{ \emptyset, M, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\} \}$

(b) Zeige mit Induktion:

(2p) für Menge M gilt: $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:

I.A: $n=0$: Die einzige 0-elementige Menge ist die leere Menge $\emptyset$ und diese hat sich selbst als einzige Teilmenge. Wg. $1 = 2^0$ ist die Beh. erfüllt für $n=0$. ($\checkmark$)

I.S. $n \longrightarrow n+1$:

Die Behauptung gelte für n.
Sei $a \in M$ beliebig (M hat $n+1$ Elemente, also mindestens eins).
Die Potenzmenge von M zerfällt in die Klassen K_1 der Teilmengen, die a enthalten, und die Klasse K_2, der Teilmengen, die a nicht enthalten: $\mathcal{P}(M) = K_1 \cup K_2$.
K_2 hat <u>nach Voraussetzung</u> 2^n Elemente, da drin genau die Teilmengen der n-Elementigen Menge $M \setminus \{a\}$ enthalten sind.
Durch die Zuordnung $\{A \mapsto A \setminus \{a\}\}$ wird K_1 bijektiv auf K_2 abgebildet. Also enthält K_1 auch 2^n Elemente.

$\Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ ✓.

A3 (2P) a $\sqrt{6} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. (Beweis analog zu Tutorüb. Bl.2, A4)
Aber explizit an der Tafel vorführen.

(P) b $1{,}412 \in \mathbb{Q}$, denn

$1{,}412 = \frac{1412}{1000}$ und $1412, 1000 \in \mathbb{N}$.

(A4) Sei $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

$$\binom{x}{k} := \frac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-k+1)}{k!}$$

(a) Für $k = 0,1,2$ berechne $\binom{-1}{k}$ & $\binom{1/2}{k}$.

$$\binom{-1}{0} := 1 \quad ; \quad \binom{-1}{1} = -1 \quad ; \quad \binom{-1}{2} = \frac{(-1)\cdot(-1-1)}{2!} = 1$$

$$\binom{1/2}{0} := 1 \quad ; \quad \binom{1/2}{1} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \binom{1/2}{2} = \frac{1/2\cdot(1/2-1)}{2!} = -\frac{1}{8}$$

(2P) allg.: $\binom{-1}{k} = \frac{(-1)\cdot(-1-1)\cdot\ldots\cdot(-1-k+1)}{k!} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot\ldots\cdot(-k)}{k!} =$

$$= \frac{(-1)^k\cdot k!}{k!} = (-1)^k$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{1/2\cdot(1/2-1)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{2}-k+1)}{k!} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot 1\cdot(1-2)\cdot\ldots\cdot(1-2k+2)}{k!} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\frac{1\cdot(-1)\cdot(-3)\cdot\ldots\cdot(-2k+3)}{k!} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot\frac{(-1)^{k-1}\cdot 1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-3)}{k!} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^k(-1)^{k-1}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k-3)\cdot(2k-2)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2k-2)\cdot k!} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^k\cdot(-1)^{k-1}\cdot\frac{(2k-2)!}{2^{k-1}(k-1)!\,k!} \quad (\text{für } k \geq 1).$$

(oder andere äquivalente Umformungen)

(b) Zeige $\binom{x+1}{k} = \binom{x}{k-1} + \binom{x}{k}$

2p

Da $\binom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-k+1)}{k!} = \binom{x}{k-1}\cdot\dfrac{x-k+1}{k}$,

folgt:

$$\binom{x}{k-1} + \binom{x}{k} = \binom{x}{k-1}\cdot\left[1 + \frac{x-k+1}{k}\right] =$$

$$= \binom{x}{k-1}\cdot\frac{x+1}{k} = \frac{x\cdot(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-(k-1)+1)}{(k-1)!}\cdot\frac{x+1}{k} =$$

$$= \frac{(x+1)\cdot((x+1)-1)\cdot\ldots\cdot((x+1)-k+1)}{k!} = \binom{x+1}{k} \checkmark.$$

A5

3P

$S_n^p := 1^p + \dots + n^p = \sum_{k=1}^{n} k^p \quad , n \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{N}_0$

Beh: $\binom{p+1}{1} S_n^p + \binom{p+1}{2} S_n^{p-1} + \dots + \binom{p+1}{p+1} S_n^0 =$

$$= \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_n^{p+1-k} = (n+1)^{p+1} - 1$$

Bew: durch vollständige Induktion

I.A $n=1$: $S_1^p = 1^p = 1 \quad \forall p \in \mathbb{N}_0$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_1^{p+1-k} = \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} = \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} - \binom{p+1}{0} =$$

$= 2^{p+1} - 1$ (nach Binomischem Lehrsatz) $\forall p \in \mathbb{N}_0$.

I.S. $n \mapsto n+1$:

$S_{n+1}^p = S_n^p + (n+1)^p \quad , p \in \mathbb{N}_0 \quad \Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_{n+1}^{p+1-k} = \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} \cdot \left(S_n^{p+1-k} + (n+1)^{p+1-k} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} S_n^{p+1-k} + \sum_{k=1}^{p+1} \binom{p+1}{k} (n+1)^{p+1-k} =$$

$$\overset{\text{I.V.}}{=} (n+1)^{p+1} - 1 + \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (n+1)^{p+1-k} - (n+1)^{p+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (n+1)^{p+1-k} - 1 \quad \text{(Setze } m := p+1-k, \; m \in \{0, \dots, p+1\})$$

$$= \sum_{m=0}^{p+1} \binom{p+1}{p+1-m} \cdot (n+1)^m - 1 = \sum_{m=0}^{p+1} \binom{p+1}{m} (n+1)^m - 1 =$$

$$\overset{\text{Binom.}}{=} (n+1+1)^{p+1} - 1 = (n+2)^{p+1} - 1 \quad \checkmark.$$

<u>Berechnung von $S_n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3$</u> :

<u>Bekannt</u>: $S_n^0 = n$ (klar)

$S_n^1 = \frac{n(n+1)}{2}$ (einfach)

$S_n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ nach. H4

$$\Rightarrow (n+1)^4 - 1 = \binom{4}{1} S_n^3 + \binom{4}{2} S_n^2 + \binom{4}{1} S_n^1 + \binom{4}{0} S_n^0 =$$

$$= 4S_n^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n$$

$$\Rightarrow S_n^3 = \frac{1}{4}\left((n+1)^4 - 1 - n - 2n(n+1) - n(n+1)(2n+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(n+1) \cdot \left[(n+1)^3 - 1 - 2n - n(2n+1)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}(n+1) \cdot \left((n+1)^3 - (2n+1)(n+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot \left((n+1)^2 - (2n+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$