Blatt 13

(H1) a) $f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$

Setze $I_k = (k\pi, (k+1)\pi)$, $J_k = (\pi/2 + k\pi, \pi/2 + (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

Dann gilt:

$$\sin(x) > 0 \iff x \in I_{2k} , \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\sin(x) < 0 \iff x \in I_{2k+1} , \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\cos(x) > 0 \iff x \in J_{2k+1} , \quad k \in \mathbb{Z}$$
$$\cos(x) < 0 \iff x \in J_{2k} , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Damit:

$$f \begin{cases} \text{monoton fallend auf } J_{2k} \\ \text{-"- wachsend auf } J_{2k+1} \end{cases}$$

$$f \begin{cases} \text{Konvex auf } I_{2k+1} \\ \text{Konkav auf } I_{2k} \end{cases}$$

Wendepunkte: $x = k\pi , \; k \in \mathbb{Z}$

b)

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 7$$
$$g'(x) = 3(x+1)^2$$
$$g''(x) = 6(x+1)$$

$g'(x) = 0 \iff x = -1$ $\qquad$ $g''(x) = 0 \iff x = -1$

$\Rightarrow$ $x = -1$ ist Sattelpunkt (insb. Wendepunkt)

Weiterhin $g'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $g'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

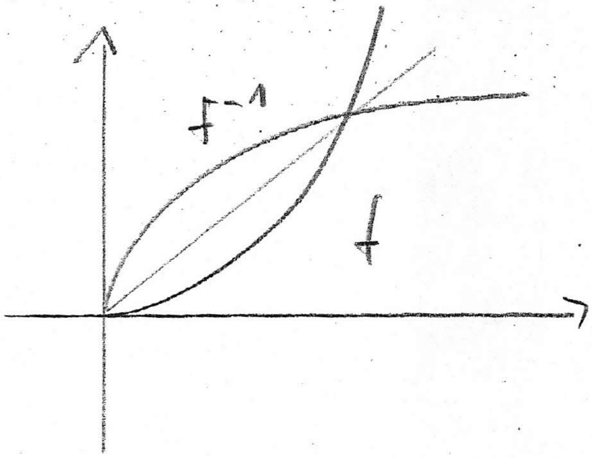
$\Rightarrow$ g ist streng monoton wachsend

Ebenso $g''(x) \geq 0 \iff x \in (-1, \infty)$

Also g Konvex auf $(-1, \infty)$, Konkav auf $(-\infty, -1)$

(H2) $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle, $f: I \to J$ bijektiv, konvex

($\Downarrow$ streng monoton)



Vermutung: $f^{-1}: J \to I$

konkav

Aber hier täuscht die Skizze — (Wenn man nur eine macht ....).

Fall 1) f streng monoton wachsend:

f konvex $\Leftrightarrow$ $f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$

f.a. $x, y \in I$ $\lambda \in [0,1]$

$\overset{f^{-1} \text{ wachsend}}{\Leftrightarrow}$ $\lambda x + (1-\lambda) y \overset{(*)}{\leq} f^{-1}(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$

f.a. $x, y \in I$, $\lambda \in [0,1]$

$\overset{f \text{ bijektiv}}{\Leftrightarrow}$ $\lambda f^{-1}(\tilde{x}) + (1-\lambda) f^{-1}(\tilde{y})$

$\leq f^{-1}(\lambda \tilde{x} + (1-\lambda) \tilde{y})$

f.a. $\tilde{x}, \tilde{y} \in I$, $\lambda \in [0,1]$

$\Leftrightarrow$ f^{-1} konkav

(wie auch in der Skizze)

Fall 2) f streng monoton fallend:

Dann dreht sich bei $(*)$ die Ungleichung um, und man erhält: f^{-1} konvex.

(H3) $f: I \to \mathbb{R}$, f diff.bar, $f'(x) \geq 0$, $x \in I$

z.z.: f streng monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $\forall\ (a,b) \subset I$
$\exists\ x \in (a,b)$ mit $f'(x) > 0$

"$\Rightarrow$" Nach Voraussetzung: $f(y) - f(x) > 0$ für alle $x, y \in I$, $y > x$

Sei nun $x < y$, $x, y \in I$ beliebig: Dann folgt mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung:

$$\exists\ \xi \in (x,y) : f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} > 0$$

✓

"$\Leftarrow$" Sei $x < y$, $x, y \in I$. Da $f'(x) \geq 0$, $x \in I$ folgt $f(y) \geq f(x)$. Annahme: $\underline{f(y) = f(x)}$

Dann gilt $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in (x,y)$

↯ (zur Voraussetzung)

(H4) $f_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $n \in \mathbb{N}$

a) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, denn

für (i) $x = 0 \Rightarrow f_n(0) = 0/1 = 0$

(ii) $x \neq 0 \Rightarrow f_n(x) = \frac{x}{1/n + nx^2} = \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{nx}}_{\to 0} + \underbrace{nx}_{\to \pm\infty}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

b) Es gilt: $f(1/n) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

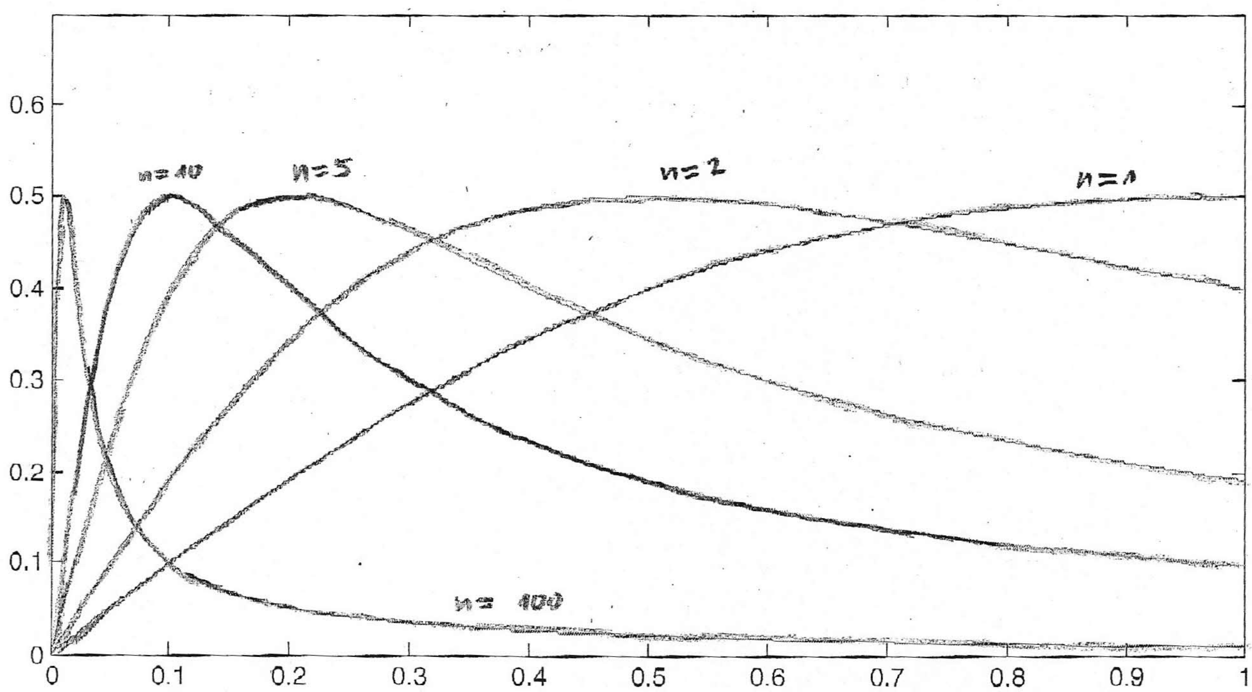
Also $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - 0| \geq 1/2$

Damit keine glm. Konvergenz (Skizze: Extrablatt)

c) $\sup\limits_{x\in[a,1]} |f_n(x) - 0| = \sup\limits_{x\in[a,1]} \left| \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{nx}}_{>0} + nx} \right|$

$\leq \sup\limits_{x\in[a,1]} \frac{1}{|nx|} \leq \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(H4)



(H5) I Intervall, $f: I \to \mathbb{R}$ konvex

a) $x_1, \dots, x_n \in I$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$ mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

Dann gilt: $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$

Beweis per Induktion: $\underline{n=2}$: ✓ f konvex n.V.

$\underline{n \Rightarrow n+1}$: OBdA $x_1 \leq \dots \leq x_{n+1}$.

$\underline{\lambda := \lambda_1 + \dots + \lambda_n}$ und $x := \frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} x_n$

$x \in I$ nach I.V., denn $\frac{\lambda_1}{\lambda} + \dots + \frac{\lambda_n}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda} = 1$.

$$\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot x_i\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i + \lambda_{n+1} \cdot x_{n+1}\right) =$$

$$= f\left(\lambda \cdot x + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \underset{f \text{ konvex}}{\leq} \lambda \cdot f(x) + \lambda_{n+1} \cdot f(x_{n+1}) =$$

$$= \lambda \cdot f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} \cdot x_i\right) + \lambda_{n+1} \cdot f(x_{n+1}) \overset{\text{I.V.}}{\leq}$$

$$= \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\lambda} \cdot f(x_i) + \lambda_{n+1} \cdot f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i) \checkmark$$

b) $f(x) = -\ln(x)$, $f'(x) = \frac{-1}{x}$, $\underline{f''(x) = +\frac{1}{x^2} > 0}$,

also $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\ln(x)$ konvex.

Da $f(x) = -\ln(x)$ streng monoton fallend ist, gilt

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \overset{!}{\geq} \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

$$\Leftrightarrow -\ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \ln\left(\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\ln\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n} \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

und dies ist wahr, da $f(x) = -\ln(x)$ konvex ist.