Blatt 11

(H1)

a) $2\cos^2 x - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})\right)^2 - 1$

$= \frac{1}{2}(e^{i2x} + 2 + e^{-i2x}) - 1 = \frac{1}{2}(e^{i2x} + e^{-i2x}) = \cos(2x)$

b) $2\sin(x)\cos(x) = 2\,\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\,\frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$

$= \frac{1}{2i}(e^{i2x} + 1 - 1 - e^{-i2x}) = \sin(2x)$

c) $-4\sin^3(x) + 3\sin(x) = -4\left(\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right)^3$

$+ \frac{3}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

$= \frac{1}{2i}(e^{i3x} - 3e^{+ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x})$

$+ \frac{3}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$

$= \frac{1}{2i}(e^{i3x} - e^{-i3x}) = \sin(3x)$

c) $\Rightarrow$ $\underset{\substack{\| \\ 0}}{\sin(\pi)} = -4\sin^3(\pi/3) + 3\sin(\pi/3)$

Also: $\sin^2(\pi/3) = 3/4$, d.h. $\underline{\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2}$,

da $\sin(x) > 0$, $x \in (0, \pi)$

c) $\Rightarrow$ $\sin(\pi/3) = \sqrt{3}/2$. Da $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$,

folgt $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$, $x \in (0, \pi/2)$

denn $\cos(x) > 0$, $x \in (0, \pi/2)$

Damit $\underline{\cos(\pi/3) = 1/2}$.

(H2)

a) $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$, da $x^2+1 > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

ist $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \frac{(x^2+2x+1)'(x^2+1) - (x^2+1)'(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2x+2}{x^2+1} - \frac{2x(x^2+2x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

b) $f(x) = 2^x \cdot \sin(x) = \exp(\ln(2) \cdot x) \cdot \sin(x)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar als Komposition diff'barer Fkt'en mi

$$f'(x) = \ln(2) \cdot 2^x \cdot \sin(x) + 2^x \cos(x)$$

c) $f(x) = x^{1/x} = \exp(\ln(x) \cdot \frac{1}{x})$.

$f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist diff.bar mit

$$f'(x) = (\ln(x) \cdot \tfrac{1}{x})' \, x^{1/x} = \tfrac{1}{x^2}(1-\ln(x)) \cdot x^{1/x}$$

d) $f(x) = |x|^3 = \begin{cases} x^3, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ (-x)^3, & x < 0 \end{cases}$

Also ist f diff.bar auf $(0,\infty)$, $(-\infty,0)$.

Nun für $x=0$: $\lim_{h\to 0} \left| \frac{|h|^3 - 0}{h} \right| = \lim_{h\to 0} |h|^2 = 0$,

also ist f auch diffbar in 0
und es gilt:

$$f'(x) = 3\cdot \operatorname{sign}(x) \cdot x^2 \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

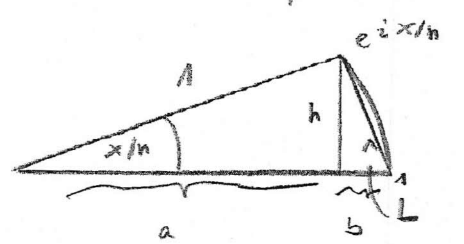
2) $f(x) = \sqrt{1+x^3}$.

Dann ist $D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x^3 \geq -1\} = [-1, \infty)$

und $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ ist diffbar mit

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \, (3x^2) = \frac{3x^2}{2\cdot\sqrt{1+x^3}}.$$

(H3) a) $x \in [0, \pi]$, $n \in \mathbb{N}$.



$a+b=1$

$L^2 = h^2 + b^2 = h^2 + (1-a)^2 = h^2 + 1 + a^2 - 2a$

$\underset{h^2+a^2=1}{=} 2(1-a) = 2(1-\cos(x/n)) \underset{3b)\ \text{Blatt 10}}{=} 4 \sin^2\left(\frac{x}{2n}\right)$

Also: $L = 2\cdot \sin\left(\frac{x}{2n}\right) > 0$

$\Rightarrow L_n = n \cdot L = 2n \sin(x/2n)$

b) $L_n = x \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2n}\right)}{\left(\frac{x}{2n}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$

$$\left(\frac{\sin(y)}{y} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{y^{2n}}{(2n+1)!} = 1 + \underbrace{y^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2(n-1)}}{(2n+1)!}}_{y\to 0 \;\downarrow\; 0} \xrightarrow[y\to 0]{} 1 \right)$$

geom. Interpretation : Bogenlänge

(H4) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

Klar: f diffbar auf $(0,\infty)$ und $(-\infty,0)$

$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right), \quad x > 0$

$f'(x) = 0, \quad x < 0$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h \cdot \sin\left(\frac{1}{h}\right) \underset{|\sin(x)|\leq 1}{=} 0$$

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 0$$

Also : f diffbar auf $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(\tfrac{1}{x}),\ x>0$$
$$f'(x) = 0 \qquad,\ x \leq 0$$

Da $\lim\limits_{x \searrow 0} (2x \sin(1/x) - \cos(\tfrac{1}{x})$

$= \lim\limits_{x \searrow 0} (-\cos(\tfrac{1}{x}))$ nicht ex.

ist f' unstetig in $x = 0$ $\left(\begin{array}{l} \limsup\limits_{x \searrow 0} \cos(\tfrac{1}{x}) = 1 \\ \liminf\limits_{x \searrow 0} \cos(\tfrac{1}{x}) = -1 \end{array} \right)$

(H5) $T_n : [-1,1] \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$

Beh.: T_n ist Polynom vom Grad n mit Leitkoeffizient 2^{n-1}

Beweis durch vollständige Induktion :

$\cos(2y) = 2\cos^2(y) - 1$

$\boxed{n=1}$ $T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x$ ✓

$\boxed{n=2}$ $T_2(x) = \cos(2\arccos(x)) = 2\cos^2(\arccos(x)) - 1 = 2x^2 - 1$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Betrachte für $t \in \mathbb{R}$:

$$2\cos(t)\cos(n \cdot t) = 2 \cdot \tfrac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})\tfrac{1}{2}(e^{int} + e^{-int})$$
$$= \tfrac{1}{2}(e^{i(n+1)t} + e^{-i(n-1)t} + e^{i(n-1)t} + e^{-i(n+1)t}),$$
$$= \cos((n+1)t) + \cos((n-1)t)$$

Damit $T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\arccos(x))$

$$= 2\cos(\arccos(x))\cos(n\cdot\arccos(x)) - \cos((n-1)\arccos(x))$$

$$= 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Und der letzte Ausdruck ist nach Induktionsvoraussetzung Polynom vom Grad $n+1$ mit Leitkoeffizient 2^n.