(H1) [$A \Rightarrow B$ ist falsch, wenn die Voraussetzung A wahr ist und die Folgerung B falsch ist. Sonst ist $(A \Rightarrow B)$ richtig]

(2P)

a) $x < 4 \Rightarrow x < 5$ ist wahr (A wahr, B wahr)

b) $x < 5 \Rightarrow x < 4$ ist falsch (A wahr, B falsch)

c) $2 < 3 \Rightarrow 3 < 5$ ist wahr (A wahr, B wahr)

d) $3 < 2 \Rightarrow 5 < 3$ ist wahr (A falsch, B egal: "e falso quodlibet")

(H2) Negationen:

(2P)

a) Alle schwarzen Schafe fressen nicht gerne Salat.

b) Es gibt einen Studierenden der Analysis, der nicht intelligent oder nicht fleißig ist.

c) Tim schläft nicht in der Analysis-Vorlesung und er tratscht nicht mit seinem Banknachbarn.

(H3) $f: A \to B$, $C, D \subset B$

a) z.z.: $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

(2P)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \cap D) &\Leftrightarrow x \in A: f(x) \in C \cap D \\ &\Leftrightarrow x \in A: f(x) \in C \text{ und } f(x) \in D \\ &\Leftrightarrow x \in A: x \in f^{-1}(C) \text{ und } x \in f^{-1}(D) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(C \cup D) &\Leftrightarrow x \in A: f(x) \in C \cup D \\ &\Leftrightarrow x \in A: f(x) \in C \text{ oder } f(x) \in D \\ &\Leftrightarrow x \in A: x \in f^{-1}(C) \text{ oder } x \in f^{-1}(D) \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \end{aligned}$$

(2P)

(H4) z.z.: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

(3P)

Induktionsverankerung $(n=1)$: $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ ✓

Induktionsschritt $(n \Rightarrow n+1)$: $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2$

Induktionsannahme

$$= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2$$

$$= \dots$$

$$= \frac{1}{3} n^3 + \frac{3}{2} n^2 + \frac{13}{6} n + 1$$

$$= \dots$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$$ ✓

(H5) $S(1) = 1/2 \quad S(2) = S(1) + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} \quad S(3) = S(2) + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$

(3P) $S(4) = \frac{3}{4} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$

Vermutung: $\boxed{S(n) = \frac{n}{n+1}}$

Ind.-Verank. $(n=1)$: $\frac{1}{2} = S(1) = \frac{1}{1+1}$ ✓

Ind.-Schritt $(n \Rightarrow n+1)$: $S(n+1) = S(n) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$ ✓