Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod

8.04.2008

Wahrscheinlichkeitsrechnung (Stochastik I) SoSe 2008
Blatt 1

Aufgabe 1. Sei I eine nicht leere Indexmenge, sei $\Omega \neq \emptyset$. Weiter seien $A,\ B,\ C,\ M_i,\ N_i \in \mathcal{P}(\Omega),\ i \in I$. Man zeige:
a) $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$
b) $(A \cup B) \cap \complement A = B \cap \complement A$
c) $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$
d) $A \backslash \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I}(A \backslash B_i)$
e) $\bigcup_{i \in I}(M_i \cap N_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i \cap \bigcup_{i \in I} N_i, \qquad \bigcap_{i \in I}(M_i \cup N_i) \supseteq \bigcap_{i \in I} M_i \cup \bigcap_{i \in I} N_i$
f) $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$
g) $A \triangle \Omega = \complement A$ sowie $A \triangle A = \emptyset$
h) $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B = \min(1_A, 1_B)$
i) $1_{A \cup B} = \max(1_A, 1_B) = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$.
$1_{\complement A} = 1 - 1_A$, $1_{A \backslash B} = 1_A - 1_B$ falls $A \supseteq B$. Allgemein: $1_{A \backslash B} = 1_A - 1_A \cdot 1_B$
j) Geben Sie eine Formel für $1_{A \triangle B}$ sowie für $1_{A \cup B \cup C}$ an.
k) Unter welchen Voraussetzungen gilt $A \cap B = A$ bzw. $A \cup B = A$? Wann gilt $A \cup B = A \cap B$?
l) Seien $A_i \in \mathcal{P}(\Omega),\ i \geq 1$, paarweise disjunkt. Dann gilt: $1_{\biguplus_{i \geq 1} A_i} = \sum_{i \geq 1} 1_{A_i}$
m) Seien $A_i \in \mathcal{P}(\Omega),\ i = 1, \ldots, 3$. Sei T die Menge aller Punkte von Ω, die in (mindestens) 2 der drei Mengen liegen.
Zeigen Sie: $T = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap A_3)$ sowie
$T = (A_1 \cap A_2 \cap \complement A_3) \uplus (A_1 \cap \complement A_2 \cap A_3) \uplus (\complement A_1 \cap A_2 \cap A_3) \uplus (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Aufgabe 2. Seien $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge und $A, B : \Omega \to \mathbb{Z}_+$ seien Funktionen. Beschreiben Sie für $k, l \in \mathbb{Z}_+$ (ohne "min" und "max" zu verwenden) die folgenden Mengen:

$$\{\omega \in \Omega : \min(A(\omega), B(\omega)) = k\}\,,\ \text{kurz:}\ = \{\min(A,B) = k\}$$

sowie

$$\{\min(A,B) \geq k\}\,, \quad \{\max(A,B) = k\}$$
$$\{\max(A,B) \geq k\}\,, \quad \{\min(A,B) = k, \max(A,B) = l\}$$

Aufgabe 3. Ritter de Méré glaubte, daß die folgenden Ereignisse gleichwahrscheinlich sind:
A: Mit *vier* Würfeln bei *einem* Wurf mindestens *eine Sechs* zu werfen
B: Mit *zwei* Würfeln bei *24* Würfen mindestens *eine Doppelsechs* zu werfen.
a) Geben Sie jeweils einen geeigneten Stichprobenraum Ω an und beschreiben Sie darin die Ereignisse A bzw. B.
b) Die Würfel werden als ideal angesehen, also ist die *Gleichverteilungsannahme* gerechtfertigt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B.

Aufgabe 4. Es werde mit 2 idealen Würfeln geworfen. S bezeichne die Augensumme, M das Maximum der Augen. Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse als Teilmengen eines geeigneten Stichprobenraums:

a) $\mathcal{S}_i := \{S = i\}$ für $1 \leq i \leq 15$

b) $\mathcal{M}_i := \{M = i\}$ für $1 \leq i \leq 6$

c) Bestimmen sie unter *Gleichverteilungsannahme* die Wahrscheinlichkeiten von $\mathcal{M}_i$ bzw. $\mathcal{S}_i$.

Sprechstunden im SoSe 2008

W. Hazod: Mittwoch, 13.00 bis 14.00: M 627

Tel.: 3055 e-mail: Wilfried.Hazod@math.uni-dortmund.de

Übungsleiter:

W. Grundmann

Sprechstunde: n.V.

e-mail: Waldemar.Grundmann@uni-dortmund.de

A. Kaplun Tel.: 3437

Sprechstunde: Mittwoch, 13–14.30 M 634

e-mail: Alexander.Kaplun@uni-dortmund.de

K. Kosfeld Tel.: 5917

Sprechstunde: Dienstag, 12–13 M 630

e-mail: Katrin.Kosfeld@uni-dortmund.de

Zusatzübungen:

K. Kosfeld s.o.