

# Inhalt der Vorlesung Stochastik I

## (Wahrscheinlichkeitsrechnung). So-Se 2008 (W. Hazod)

Der Inhalt ist zu etwa 90% seit Jahren unverändert. Aus Erfahrung weiß ich, daß dieser Stoffumfang studierbar ist. Lediglich die Reihenfolge und die Unterteilung variieren von Jahr zu Jahr. Solche Änderungen behielt ich mir auch für diese Vorlesung vor. In diesem Jahr wurde vor allem das letzte Drittel verändert: Ein starkes Gesetz der großen Zahlen und neue Beweise für den ZGWS sowie die Khinchin-Version des GdgZ wurden eingefügt.

Die Statistik Anteile finden sich in mehreren Abschnitten verstreut.

Maßtheorie und Integrationstheorie wurden nur in Form eines Steilkurses dargestellt, dagegen wurde den Anwendungsbeispielen viel Platz eingeräumt.

**Voraussetzung zum Verständnis sind gute Kenntnisse aus Analysis und Linearer Algebra.**

§0 Notationen

§1 *Mathematische Modellbeschreibung*: Ereignisse als Mengen, logische Operationen als Mengenoperationen. Wahrscheinlichkeiten und ihre Eigenschaften. ( $\sigma$ -Additivität als mathematische Forderung) Die deMorganschen Formeln. Eigenschaften von Mengensystemen. ( $\sigma$ -Algebren als mathematische Forderung) Häufigkeitsansatz und subjektive Wahrscheinlichkeiten.

§2 *Diskrete (höchstens abzählbare) W'Räume* Produkte (unabhängige Koppelungen) und Bilder von W-Räumen.

§3 *Endliche W'Räume (Laplace Räume, Gleichverteilung auf endlichen Mengen)* Kombinatorische W'keit: Standardformeln und -beispiele. Erste Asymptotik (Geburtstagsproblem / Binomialverteilung versus hypergeometrische Vt. / Binomialvt. v. Poissonverteilung (einfachste Version) ).

§4 *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Verteilungen mit Dichten*. Standardbeispiele geometrischer W'keiten wie z.B. das Bertrand'sche Paradoxon leiten über zu Verteilungsfunktionen und Verteilungen mit Dichten. Bildverteilungen, Verteilungsfunktionen und Schwänze.

§5 *Beispiele spezieller Verteilungen* Wichtigste Beispiele (z.T. schon vorher motiviert) von Verteilungen, deren Verteilungsfunktionen, Schwänze und ggf. Dichten.

§6 *Elementare bedingte Wahrscheinlichkeiten*. Bayessche Formel, Produktsatz, S.v.d. totalen Wahrscheinlichkeit . . . .

§7 *Zufallsvariable und Verteilungsfunktionen* Transformationen von Zufallsvariablen und Verteilungen. Restlebensdauerverteilungen. Mediane und Quantile.

§8 *Markoffketten* Übergangsmatrizen und -Graphen. Chapman-Kolmogoroff Gleichungen. Meist wird der zeitlich-homogene Fall behandelt. Invariante Verteilungen (Existenz und Berechnung), Standardbeispiele.

Langzeitverhalten von Markoffketten (zeitlich-homogen, endlicher Zustandsraum): Satz von Markoff, Mittelergodensatz. Lage des Spektrums (Gerschgorinkreise für stochastische Matrizen).

§9 *Mehr über bedingte W'keiten, Verteilungen und Verteilungsfunktionen*: Restlebensdauerverteilungen, Hazardraten, Maximum Likelihood Schätzer. Bedingte Wahrscheinlichkeiten  $W(\cdot | \mathfrak{A})$  für eine durch eine Zerlegung definierte  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$ .

(Die Fortsetzbarkeit des durch eine Verteilungsfunktion definierten Inhalts zu einem Maß (Lebesgue-Stieltjes-Maß) wird nicht bewiesen).

§10 *Unabhängigkeit; Verteilungen auf Produkträumen. Gemeinsame Verteilungen und Marginalverteilungen* Wiederholung: Zufallsvariable, Meßbarkeit, Bildverteilung. Produktverteilung (Existenz des Produktmaßes ohne Beweis), Gestalt der Randverteilungsdichten.

Definition der Unabhängigkeit (2 Mengen, endlich viele Mengen, Unabhängigkeit von  $\sigma$ -Algebren, Unabhängigkeit von Zufallsvariablen). Charakterisierung der Unabhängigkeit von Zufallsvariablen durch (1) Produktverteilungen, (2) Verteilungsfunktion der gemeinsamen Verteilung (3) Gestalt

der Dichten. (Methode der Dynkinsysteme und ihre Eigenschaften)

Anwendungen u.a. : Das Sekretärinnenproblem.

§11 *Mehr über Verteilungen auf Produkträumen. Gemeinsame Verteilungen.* Transformation von Zufallsvariablen. Gestalt der Dichten (falls vorhanden). Transformation von Verteilungen mit Dichten (Lebesguesche Transformationsformel wird vorausgesetzt). Speziell: Verteilung von Summen / Produkten / Quotienten / Maxima / Minima von Zufallsvariablen, insbesondere im Fall der Unabhängigkeit. Faltung von Verteilungen mit Dichten.

Beispiele von Verteilungen der mathematischen Statistik.

§12 *Summen unabhängiger diskreter Zufallsvariablen.* Faltungen diskreter Maße. Poissonapproximation der Binomialverteilung (vgl. §3) mit Fehlerabschätzung (nach LeCam).

§13 *Erwartungswert und Momente* Erwartungswert als Integral. Abriß der Integrationstheorie. Eigenschaften des Erwartungswertes bzw. des Integrals: Insbes. S. v. B. Levi, L.v. Fatou, S.v. Lebesgue, S.v. Fubini.

Der Spezialfall diskreter Verteilungen und Verteilungen mit Dichten.

Transformationssatz und Anwendungen: Berechnung von Momenten.

Varianz, Kovarianzen, Unkorreliertheit. Satz von Bienaymè. C-S-Ungleichung.

Bedingte Erwartung  $E(\cdot | \mathfrak{A})$  (vgl. §9). Beispiele: Irrfahrten, Definition eines Martingals.

§14 *Ungleichungen* Tschebyscheff-Markoff Ungleichungen, Exponential Ungleichungen.

§15 *(Schwaches) Gesetz der großen Zahlen (G.d.g.Z.) (Version I)* für p.w. unkorrelierte ZV, inklusive Fehlerabschätzungen. Fehlerabschätzung mittels Tschebyscheff Ungleichung. (Hoeffding Ungleichung o. Bew.)

Elemente der Statistik: Konfidenzintervalle / Erwartungstreue Schätzer: Stichprobenmittel und Stichprobenvarianz (s.auch Übungen). Stochastische Konvergenz von empirischen Verteilungsfunktionen.

Summen unabhängiger Zufallsvariablen. Faltungsformeln für Dichten. Die wichtigsten Verteilungen der mathematischen Statistik.

Anwendungen: Monte Carlo Methoden.

§16 *Schwache Konvergenz oder Konvergenz in Verteilung.* Stochastische, schwache Konvergenz und (gleichmäßige) Konvergenz von Verteilungsfunktionen.

§17 *Zentraler Grenzwertsatz* . (Elementarer Beweis des ZGWS für unabhängige identisch verteilte Summanden). Fehlerabschätzung im ZGWS: Satz von Berry Esséen (ohne Beweis). Beweis des GdgZ nach Khinchin. Lokaler ZGWS (Approximation der Binomialvt. durch die Normalverteilung)

§18 *Ein Starkes GggZ.* Lemma v. Borel Cantelli, St. G.d.g.Z. für identisch verteilte quadratintegrierbare ZV. Satz von Glivenko-Cantelli (Haupt- oder Zentralsatz der math. Statistik).

§19 *Momenterzeugende Funktionen, Fourier- und Laplace Transformierte* Momenterzeugende Funktion, Laplace- und Fouriertransformierte, erzeugende Funktion. Wichtigste Eigenschaften (z.T. ohne Beweis): Berechnung von Momenten und momenterzeugende Funktion von Faltungen.

Konvergenz der Transformierten und schwache Konvergenz, bzw. (für Verteilungen auf  $\mathbb{Z}_+$ ) Konvergenz in der (Totalvariations-)Norm ( $l_1$ -Norm).

Ohne Beweis: Stetigkeitssatz von P. Lévy und Eindeutigkeitssatz für Fouriertransformierte. *Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie* Summen unabhängiger ZV: Khinchinsches schwaches G.d.g.Z. (Neuer Beweis mittels Fourier Transf., vgl §15), Zentraler Grenzwertsatz - ZGWS (für unabhängige identisch verteilte Summanden. Neuer Beweis mittels Fourier Transf).

*Einige Anwendungsbeispiele* Wahlmanipulation *entschlossene Minderheiten*, Signalerkennung, ein Primzahltest, Bestimmung von Konfidenzintervallen, Monte Carlo Methoden etc.