10.23 Sekretärinnenproblem $\Omega = \mathrm{Per}(N,N)$

$\pi \in \mathrm{Per}(N,N)$. Folge $\underset{i_1}{\pi(1)}, \dots, \underset{i_N}{\pi(N)}$ in $\{1, \dots N\}$

(Neue) Reihenfolge $\{i_1, \dots, i_N\} = \{1, \dots, N\}$.

Rang $(j) \doteq i \overset{\cdot}{\Longleftrightarrow}$ Es gibt $j_1, \dots j_{i-1}$: $\pi(j_\ell) < \pi(j_i)$, $\ell < i$, $j_i; j_{i+1} \dots j_N$ $\pi(j_\ell) > \pi(j_i)$: $\ell > i$

Gesucht: m^* : $\pi(m^*) = N$ (maximaler Rang), $m^* =: M(\pi)$

Voraussetzungen: π zufällig, gleich vt. auf $S_N = \mathrm{Per}(N,N)$

(1) Daher ist auch $M(\pi)$ eine Z.V. mit Werten in $\{1, \dots, N\}$.

(2) Beobachtbar sind nur sequentielle Ränge, d.h. $\xi_k(\pi) := \mathrm{card}\{j \leq k : \pi(j) \leq \pi(k)\} \subseteq \{1, \dots, k\}$

(3) Gesucht: Stoppregel (Strategie) $\tau : \pi \mapsto k \in \{1, \dots, N\}$

mit (a) $\{\tau(\pi) = k\}$ hängt nur von $\{\xi_1(\pi), \dots, \xi_k(\pi)\}$ ab

(b) $W(\tau(\pi) = M(\pi))$ ist „möglichst groß"

(c) Falls $\pi(k)$ beobachtet ist, kann $\{\tau(\pi) = k\}$ sein oder $\{\tau(\pi) > k\}$.

Für $k = N$: $\tau(\pi) = N$. (in jedem Fall)

Strategie: $m \in \{1 \dots N\}$,

$$\tau_m := \begin{cases} \min\{k > m : \xi_k(\pi) = k\} & \text{falls diese Menge} \neq \emptyset \text{ ist} \\ N. & \text{sonst} \end{cases}$$

[Erst Beweislage sondieren]