Idee: $X : \Omega \longrightarrow \Lambda$

$$\mathcal{P}(\Omega) \longleftarrow \mathcal{P}(\Lambda) \quad X^{-1}$$

(1) $X^{-1}(\mathcal{A})$ ist σA. $\xleftarrow{X^{-1}}$ $\mathcal{A}$ σ-Algebra (gegeben) $\Longleftarrow$

(2) Σ ist σ.A. (gegeben) $\xrightarrow{X}$ $\Longrightarrow$ $\{\tilde{A} \subseteq \Lambda : X^{-1}(\tilde{A}) \subseteq \Sigma\}$ ist σ-Algebra.

! $X(\Sigma)$ ist i.a. keine σ-A. !

7.3 a) Ω, Λ metrische Räume, Borel σ-A.

$X : \Omega \to \Lambda$ stetig $\Rightarrow \mathcal{B}(\Omega)$-$\mathcal{B}(\Lambda)$-mb.

$[\![\Leftarrow X^{-1}(\mathcal{O}(\Lambda)) \subseteq \mathcal{O}(\Omega) \subseteq \mathcal{B}(\Omega)]\!]$

b) $X : \Omega \to \mathbb{R}$, Σ σ-A. auf Ω, $\mathcal{B}$ Borel auf $\mathbb{R}$

X Σ-$\mathcal{B}$-mb. $\Leftrightarrow$ $\forall$ Intervalle $(-\infty, a]$ ist $X^{-1}(-\infty, a] \in \Sigma$, d.h. $\{X(\cdot) \leq a\} \in \Sigma$

$[\![\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \Sigma(\text{Intervalle})]\!]$

c) $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ist Σ-$\mathcal{B}^d$-mb. $\Leftrightarrow$

$\forall \vec{a} \in \mathbb{R}^d$: $\underbrace{\{\omega : X_i(\omega) \leq a_i,\ 1 \leq i \leq d\}}$ $\in \Sigma$

$[\![X^{-1}\left(\bigotimes_1^d (-\infty, a_i]\right) = " .]\!]$