

Ziellemma 7.2

(1) $X: \Omega \rightarrow \Lambda$ sei eine Abbildung. Dann ist
 $X^{-1}: \mathcal{P}(\Lambda) \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ ein Boolescher Homomorphismus
(d.h. vertauselbar mit \cap, \cup, \complement).

Folgerung: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Lambda)$ sei σ -Algebra $\Rightarrow X^{-1}(\mathcal{A})$ ist
 σ -Algebra $\subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

(2) $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ sei eine σ -Algebra. Sei

$$\bullet \tilde{\mathcal{A}} := \{ \tilde{A} \in \mathcal{P}(\Lambda) : X^{-1}(\tilde{A}) \in \Sigma \} \subseteq \mathcal{P}(\Lambda)$$

Dann ist $\tilde{\mathcal{A}}$ eine σ -Algebra.

(Nachprüfung der Axiome. z.B. für $\tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{A}}$.

$$\Leftrightarrow X^{-1}(\tilde{A}_n) \in \Sigma \Rightarrow X^{-1}(\cup \tilde{A}_n) \stackrel{(1)}{=} \cup X^{-1}(\tilde{A}_n) \in \Sigma$$

Also $\cup \tilde{A}_n \in \tilde{\mathcal{A}}$ (nach Def. von $\tilde{\mathcal{A}}$) \llcorner

(3) Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Lambda)$ ein Mengensystem

$$\bullet \text{ Dann ist } \Sigma(X^{-1}(\mathcal{E})) = X^{-1}(\Sigma(\mathcal{E})).$$

$$\text{''} \subseteq \text{''} : X^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq X^{-1}(\Sigma(\mathcal{E})) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \Sigma(X^{-1}(\mathcal{E})) \subseteq X^{-1}(\Sigma(\mathcal{E}))$$

$$\text{''} \supseteq \text{''} \text{ Sei } \tilde{\mathcal{A}} := \{ \tilde{A} \subseteq \Omega : X^{-1}(\tilde{A}) \in \Sigma(X^{-1}(\mathcal{E})) \}$$

$\stackrel{(2)}{\Rightarrow} \tilde{\mathcal{A}}$ ist eine σ -Algebra, $\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{E}$ nach Konst.

$$\text{also } \Sigma(\tilde{\mathcal{A}}) = \tilde{\mathcal{A}} \supseteq \Sigma(\mathcal{E}).$$

Daher (nach Def. von $\tilde{\mathcal{A}}$) $X^{-1}(\Sigma(\mathcal{E})) \subseteq \Sigma(X^{-1}(\mathcal{E})) \llcorner$

(4) Sei Σ eine σ -A. $\subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, \mathcal{A} eine σ -A. $\subseteq \mathcal{P}(\Lambda)$.

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A} \text{ mit } \Sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow (X^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \Sigma) \Rightarrow (X^{-1}(\mathcal{A}) \subseteq \Sigma) \text{ (messbar)}$$

[Unmittelbar aus (3): $X^{-1}(\mathcal{A}) = \Sigma(X^{-1}(\mathcal{E}))$] \llcorner