OBdA $f \neq 0$ (sonst $y = 0$).

- Sei $\mathcal{U} = \ker f$ (abg. Teilraum).
- $\exists\, z \in \mathcal{U}^{\perp} \setminus \{0\}$ [[Wäre $\mathcal{U}^{\perp} = \{0\}$, so wäre $\mathcal{U} = H \Rightarrow f = 0$]]

  (d.h. $f(z) \neq 0$)
- $\forall\, x \in H$ ist $u(x) := x - \frac{f(x)}{f(z)} \cdot z \in \mathcal{U} = \ker f$,

  also $f(u(x)) = 0$, andererseits
- $\langle u(x), z \rangle = 0$, (da $z \in \mathcal{U}^{\perp}$) $\left(x = u(x) + \frac{f(x)}{f(z)} \cdot z \right)$

$$\Rightarrow \langle x, z \rangle = \underbrace{\langle u(x), z \rangle}_{0} + \frac{f(x)}{f(z)} \langle z, z \rangle = \frac{f(x)}{f(z)} \|z\|^2$$

Sei $y = y_f := \frac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2} \cdot z \Rightarrow \langle x, y_f \rangle = f(x)$ $\forall\, x \in H$.

Hier: $H = \mathbb{R}^d$, oder $\mathbb{C}^d$

oder $L^2(\Omega, \Sigma, \lambda)$ für

ein (σ-endliches) Maß λ.