Prof. Dr. J. Woerner
Dr. A. Schnurr

WS 2009/10
Dezember 2009

Probeklausur zur „Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik für Informatiker“

Bearbeitungszeit: 90 Minuten
keine Hilfsmittel zugelassen

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Geben Sie die Axiome (A1)-(A3) eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraums an.

b) Sei (Ω, P) ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Seien $A, B, C \subseteq \Omega$. Geben Sie die Definition dafür an, dass die drei Ereignisse paarweise unabhängig sind.

c) Richtig oder falsch: Sind A und B unabhängige Ereignisse, so gilt $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

d) Geben Sie die Zähldichte der Poissonverteilung an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sind n Fahnenmasten, die in einer Reihe stehen, sowie r Flaggen. Es können pro Mast beliebig viele oder keine Flaggen gehisst werden. Es soll keine Flagge übrig bleiben, d.h. jede wird gehisst.

a) Auf wie viele verschiedene Arten können die r Flaggen (alle mit unterschiedlichen Farben) gehisst werden? Dabei soll die relative Position der Flaggen zueinander (d.h. die Reihenfolge in der sie am jeweiligen Mast hängen) nicht berücksichtigt werden.

b) Was ergibt sich in Aufgabenteil a), wenn alle Flaggen rot sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass durch $p(n) := p(1-p)^n$ eine Zähldichte auf $\{0, 1, 2, ...\}$ gegeben ist.

b) Sei X eine Zufallsvariable mit $P(X = n) = p(n)$. Bestimmen Sie EX. (Hinweis: Differenzieren.)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Finale bei einer Game-Show.
Der Kandidat hat die Auswahl zwischen fünf Toren. Hinter einem befindet sich der Hauptpreis (ein Auto), hinter den anderen vier Toren sind Nieten (hässliche, rote Stoffpuppen). Der Kandidat wählt nun zufällig eines der Tore. Dann öffnet der Showmaster eines der anderen Tore, hinter denen sich eine Niete befindet. Nun muss sich der Kandidat entscheiden, ob er beim zuerst gewählten Tor bleibt, oder ob er wechselt.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kandidat gewinnt, der nicht wechselt.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kandidat gewinnt, der wechselt.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Seien A, B Ereignisse eine Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω, P).
a) Es sei $P(A) = 0.7$. Wie groß muss $P(B)$ sein, damit sicher $P(A \cap B) \geq 0.5$ gilt (begründen Sie ihre Antwort)?
b) Es gelte $P(A) = 0.5, P(B) = 0.5$. Die Ereignisse A, B seien unabhängig. Sei $X := 1_A$ die Indikatorvariable zu A und $Y := 1_B$ die Indikatorvariable zu B. Bestimmen Sie die Verteilung von $X \cdot Y$ und von $X + Y$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Bei einer Röntgenuntersuchung des Brustkorbs sei die Wahrscheinlichkeit, dass eine vorhandene Tbc entdeckt wird, mit 0.9 angenommen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Tbc-freie Person fälschlich als Tbc-Träger diagnostiziert wird, sei 0.01. Aus einer großen Bevölkerung mit 0.1 % Tbc-Fällen sei eine Person aufgrund der Röntgenuntersuchung als Tbc-Träger eingestuft worden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person tatsächlich Tbc hat.