

Prof. Dr. W. Hazod

SoSe 2006

K L A U S U R

Stochastik I (= Wahrscheinlichkeitsrechnung)

19.7.2006

Die Klausur besteht aus Aufgaben, die in ähnlicher Form in den Übungen oder in der Vorlesung behandelt wurden sowie aus Fragen zum Stoff der Vorlesung. Bei der Lösung der Aufgaben wird nicht erwartet, daß Sie die Ergebnisse numerisch auswerten. (Taschenrechner ist nicht erforderlich). Es genügt, eine Formel abzuleiten.

- Begründen Sie (kurz und prägnant) die Lösungsschritte.
- Vergessen Sie nicht die Fragen nach **Definitionen** und ggf. nach mathematischen **Sätzen** *exakt* zu beantworten.
- Jedes Blatt Papier ist mit **Namen und Aufgabennummer** zu versehen. (Deutlich lesbar in BLOCKSCHRIFT).
- Für jede Aufgabe ist ein eigenes Blatt zu verwenden.
- Eigenes Papier darf nicht verwendet werden.
- Die maximal erreichbare Punktezahl steht neben jeder Aufgabe.
- Maximal erreichbare **Gesamtpunktezahl: 39**
- Zum Bestehen sind **19 ±ε Punkte** erforderlich.

Name und Matrikelnummer müssen deutlich lesbar sein!

Name:	Vorname:	Geb.Datum:		
Mathematik Sek. II <input type="checkbox"/>	Math. Dipl. <input type="checkbox"/>	WiMa <input type="checkbox"/>	Fachsemester:	Matr. Nr:

Punkte:	A1	A2	A3	A4	Summe:
---------	----	----	----	----	--------

Note:

Aufgabe 1.

Ein Schaltkreis bestehe aus 5 Schaltelementen S_1, \dots, S_5 , die gemäß nachfolgendem Schaltplan verbunden sind. Solange die Schaltelemente voll intakt sind, befinden sich die Schalter in Stellung $S_i = 1$, beim Auftreten von Fehlern springen sie in die Stellung $S_i = 0$, d.h., Strom kann nicht mehr fließen. $S_i(t) \in \{0, 1\}$ gibt die Schalterstellung von S_i zur Zeit t an.

ξ_i sei die Lebensdauer des i -ten Schaltelements; die Lebensdauern seien unabhängige Zufallsvariable mit stetiger Verteilungsfunktion $F_{\xi_i} = F$ und Schwanz $R_{\xi_i} = R$ für alle i . Es gilt also: $\{S_i(t) = 1\} = \{\xi_i > t\}$.

- Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, daß zur Zeit t Strom durch den Schaltkreis fließen kann.
- Bestimmen Sie zur Zeit t die Wahrscheinlichkeit, daß Strom fließen kann, unter der Voraussetzung, daß das Schaltelement S_1 noch intakt ist.
- Bestimmen Sie zur Zeit t die Wahrscheinlichkeit, daß S_3 ausgefallen ist, unter der Voraussetzung, daß Strom durch den Schaltkreis fließen kann.
- Geben Sie die Verteilungsfunktion der Lebensdauer des Schaltkreises an, den man erhält, wenn S_5 durch einen stets geschlossen Schalter (mit unbegrenzter Lebensdauer) ersetzt wird.

Skizze einfügen

Erreichbare Punkte: 10



Aufgabe 2.

$(T_n)_{n \geq 0}$ sei eine zeitlich homogene Markoffkette auf dem Zustandsraum $\{1, \dots, 5\}$ mit Übergangs-

$$\text{matrix } P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Geben Sie den Übergangsgraphen an.
- Bestimmen Sie die Menge der invarianten Verteilungen.
- Ist der Satz von Markoff anwendbar? ja nein
[Hinweis: Betrachten Sie den Übergangsgraphen der Matrix P^2 oder bestimmen Sie $p_{11}^{(n)}$, $p_{55}^{(n)}$ für $n = 1, \dots, 4$.]
- Ist der Mittelergodensatz anwendbar? ja nein
- Sei $\vec{p}^{(0)} = \vec{e}_2 = (0, 1, 0, 0, 0)$ die Startverteilung. Was läßt sich über das Langzeitverhalten der Wahrscheinlichkeiten $W(T_n = 2)$ für $n \rightarrow \infty$ aussagen?

Begründen Sie in c) – e) Ihre Antworten!

Erreichbare Punkte: 8



Aufgabe 3 Bei der Herstellung von Siliziumkristallen müssen die Oberflächen von Staubpartikeln befreit werden. Der Durchmesser der Partikel sei eine Zufallsvariable ξ , die nach einer Verteilung mit Dichte $x \mapsto c \cdot 1_{[1,\infty)}(x) \cdot x^{-4}$ verteilt ist.

Der Reinigungsaufwand hänge umgekehrt proportional vom Partikeldurchmesser ab, die somit entstehenden Kosten sind eine Zufallsvariable $\Omega \ni \omega \mapsto K(\omega) := 1/\xi(\omega)$.

a) Bestimmen Sie die Konstante c

b) Geben Sie **b1)** Erwartungswert $\mathbb{E}(\xi)$ und **b2)** Varianz $V(\xi)$ an

c) Geben Sie die **c1)** Verteilungsfunktion F_K und **c2)** Dichte f_K von K an

[Kontrolle: $f_K(x) = 3 \cdot x^2 \cdot 1_{[0,1]}(x)$]

d) Geben Sie **d1)** $\mathbb{E}(K)$ und **d2)** $V(K)$ an [Kontrolle: $V(K) = \frac{3}{5} - (\frac{3}{4})^2 < 0.04$]

e) Es werden unabhängige Stichproben ξ_i , $1 \leq i \leq n$, vom Umfang n betrachtet. K_i , $1 \leq i \leq n$ seien die entsprechenden Kosten. Wie groß muß bei gegebener Genauigkeit ϵ und Fehlertoleranz α der Stichprobenumfang n gewählt werden, damit

$$W\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_i - \frac{3}{4}\right| < \epsilon\right) > 1 - \alpha \quad \text{gilt?}$$

Erreichbare Punkte: 11



Aufgabe 4

1) Seien A_i , $i \leq i \leq 3$ Ereignisse. Welche der folgenden Formeln ist richtig?

$$\square W\left(\bigcap_{i=1}^3 A_i\right) = W(A_1|A_2 \cap A_3) \cdot W(A_2|A_3) \cdot W(A_3) \quad \square W\left(\bigcap_{i=1}^3 A_i\right) = \prod_{i=1}^3 W(A_i)$$

$$\square W\left(\bigcap_{i=1}^3 A_i\right) = W(A_1|A_2) \cdot W(A_2|A_3) \cdot W(A_3)$$

• $(U_i = 1_{C_i})_{i \geq 1}$ seien 0 – 1-wertige paarweise unkorrelierte Zufallsvariable mit $p_i := W(C_i)$.

2) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

Die $(U_i = 1_{C_i})_{i \geq 1}$ sind paarweise unabhängig

$\mathbb{E}(U_i \cdot U_j) = W(C_i) \cdot W(C_j)$ für $i \neq j$ $\mathbb{E}(U_i \cdot U_j) = 0$ für $i \neq j$

3) Seien die Variablen U_i definiert wie in 2). Geben Sie ihre Verteilungen $\mu_i := U_i(W)$ an.

4) Die U_i seien wie in 2) definiert, 0 – 1-wertig und unabhängig. Geben Sie die Verteilung $S(W)$ der Zufallsvariablen $S := U_1 + U_2$ an.

5) Sei $\Omega = \bigsqcup B_i$ eine Zerlegung in paarweise fremde Ereignisse B_i , $1 \leq i$. Sei $A \in \Sigma$. Wie lautet die Bayessche Formel für $W(B_1|A)$.

6) Sei ξ eine reelle Zufallsvariable, deren Verteilung eine Dichte f besitzt. Welche Dichte hat $T : x \mapsto \exp(\xi(x))$?

7) Die Restlebensdauer einer Zufallsvariablen $L \geq 0$ mit Verteilungsfunktion $F_L =: F$ und Schwanz $R_L =: R$ ist definiert als

$$W(L > s + t | L > t) =: R_t(s) \text{ für } s, t \geq 0.$$

Welche Formel ist richtig (falls $W(L > t) > 0$)?

$$\square R_t(s) = \frac{W(L > t+s)}{W(L > t)} \quad \square W(L \leq s + t | L \geq t) = \frac{F(s+t)}{F(t)} \quad \square W(L \leq s + t | L \geq t) = \frac{W(L \leq s+t)}{W(L > t)}$$

• T_i , $i \geq 0$, seien reelle Zufallsvariable.

8) Wie ist die Streuung $\sigma(T_1)$ definiert?

9) Was bedeutet: T_n konvergiert gegen T_0 stochastisch?

Für alle $\omega \in \Omega$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(\omega) = T_0(\omega)$

Für die Verteilungsfunktionen gilt $F_{T_n}(x) \rightarrow F_{T_0}(x)$ (in allen Stetigkeitspunkten von F_{T_0})

Für alle $\eta > 0$ gilt: $W(|T_n - T_0| > \eta) \rightarrow 0$

10) Formulieren Sie den Zentralen Grenzwertsatz für die Folge T_n , $n \geq 1$.

[Geben Sie die nötigen Voraussetzungen an!]

Erreichbare Punkte: 10

