Aufgabe 3: Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an: w ☐ für *wahr* bzw. f ☐ für *falsch*.
In den einzelnen Aufgabenteilen werden die richtigen und falschen Antworten miteinander verrechnet.

- (Ω, Σ, W) **sei ein Wahrscheinlichkeitsraum** $A_i \in \Sigma,\ 1 \le i$, **seien Ereignisse.**

(1)a) $W(\bigcap_1^3 A_i) = W(A_1 \cap A_2 | A_3) \cdot W(A_1 | A_2 \cap A_3)$ w ☐ f ☒
b) $W(\bigcup_1^3 A_i) = \sum_1^3 W(A_i) + \sum_{1 \le i,j \le 3} W(A_i \cup A_j) + W(\bigcup_1^3 A_i)$ w ☐ f ☒
c) $W(\bigcap_1^3 A_i) = W(A_1) \cdot W(A_2|A_1) \cdot W(A_3|A_2 \cap A_1)$ w ☒ f ☐ 3

(2) Seien $W(A_i) > 0$ für $i = 1, 2$.
a) $A_1 \cap A_2 = \emptyset \Rightarrow W(A_1|A_2) = W(A_2|A_1)$ w ☒ f ☐
b) $W(A_1|A_2) = W(A_2|A_1) \Rightarrow W(A_1) = W(A_2)$ w ☐ f ☒ 2

(3)a) (A_1, A_2) sind unabhängig $\Rightarrow$ $(\complement A_1, \complement A_2)$ sind unabhängig. w ☒ f ☐
b) $W(A_1) \in \{0, 1\} \Rightarrow (A_1, \complement A_1)$ sind unabhängig. w ☒ f ☐
c) (A_i, Ω) sind stets unabhängig. w ☒ f ☐ 3

- X, Y **seien reelle Zufallsvariable.**

(4)a) (X, Y) sind unabhängig $\Leftrightarrow \forall A \in \Sigma$ sind $(\{X \in A\}, \{Y \in A\})$ unabhängige Ereignisse. w ☐ f ☒
b) Für alle $A \in \Sigma, x_0 \in \Omega$ sind stets $(A, \{x_0\})$ unabhängige Ereignisse. w ☐ f ☒ 2

(5) Sei $\vec{Z} := (X, Y)$ der Zufallsvektor mit den Komponenten (X, Y). Es existieren die zugehörigen Dichten $f_X, f_Y, f_{\vec{Z}}$. Dann gelten:
a) $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{\vec{Z}}(x, y) dy$ w ☒ f ☐
b) $W(X \in [a, b], Y \in [c, d]) = \int_a^b f_X dx \cdot \int_c^d f_Y dy$ w ☐ f ☒ 2

(6) X, Y seien reelle Zufallsvariable. Die Verteilungsfunktionen bzw. deren Schwänze seien mit F_X, F_Y, R_X, R_Y bezeichnet. Seien $a, b \in \mathbb{R}$.
a) $W(X \le a, Y \le a) = W(\max(X, Y) \le a)$ w ☒ f ☐
b) $W(X \le a, Y \le b) = F_X(a) \cdot F_Y(b)$ w ☐ f ☒
c) (X, Y) seien unabhängig $\Rightarrow$ $W(a < X \le b, Y > c) = (F_X(b) - F_X(a)) \cdot R_Y(c)$ w ☒ f ☐ 3

- X, Y **seien reelle Zufallsvariable mit 2-ten Momenten.**

(7)a) $\mathbb{E}(|X|) < \infty$ w ☒ f ☐
b) $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$ w ☐ f ☒
c) $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2 \cdot \mathbb{E}(X \cdot Y)$ w ☐ f ☒
d) Seien (X, Y) unkorreliert $\Rightarrow$ für alle $a \in \mathbb{R}$ sind $(X - a, Y - a)$ unkorreliert. w ☒ f ☐ 4

(8) $(\xi_n : \Omega \to \{1, \ldots, N\})_{n \ge 1}$ sei eine zeitlich homogene Markoff Kette mit Übergangsmatrix P.
a) Wenn P Zeilen mit $p_{i,j} \in \{0, 1\}$ besitzt, so hat die Kette (mindestens) einen Friedhof. w ☐ f ☒
b) Die Gleichverteilung auf $\{1, \ldots, N\}$ ist stets eine invariante Verteilung. w ☐ f ☒
c) Wenn $\vec{\pi} := (\frac{1}{N}, \ldots, \frac{1}{N})$ invariant ist, so ist P doppelt stochastisch. w ☒ f ☐ 3

22 Punkte

Zusatzaufgabe $(X_n)_{n \ge 1}$ seien reelle Zufallsvariable mit gleicher Verteilung $X_i(W) = \mu$. Es existiere $a := \mathbb{E}(X_i)$ und $\sigma^2 := \mathbb{V}(X_i)$. Seien $S_N := \sum_1^N X_i$ und $\overline{X}_N := \frac{1}{N} S_N$ der Mittelwert ($N \in \mathbb{N}$.) Weiter sei $\varepsilon > 0$.
a) Die X_i seien paarweise unkorreliert $\Rightarrow$ $W(a \in (\overline{X}_N - \varepsilon, \overline{X}_N + \varepsilon)) > 1 - \frac{\sigma^2}{N\varepsilon^2}$ w ☒ f ☐
b) $W(a \in (\overline{X}_N - \varepsilon, \overline{X}_N + \varepsilon)) = W(|\overline{X}_N - a| < \varepsilon)$ w ☒ f ☐
c) $W(|\overline{X}_N - a| < \varepsilon) = W(|\sum_1^N (X_i - a)| < \varepsilon N) \approx N_{0,1}((-\frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sigma}, \frac{\varepsilon\sqrt{N}}{\sigma}))$ w ☒ f ☐ 3

3 Punkte