HS Stochastik für Lehramt
WS 2007/2008
Prof. Dr. Hazod

6. Vortrag
(6./13. Dezember 2007)

zum Thema

Das starke Gesetz der großen Zahlen

(von Julia Kröger)

Beobachtet man die Werte einer zufälligen Größe, so scheinen die arithmetischen Mittel dieser beobachteten Werte einem festen Wert zuzustreben.
Gemeinhin bezeichnet man Aussagen über die Konvergenz arithmetischer Mittel von Zufallsgrößen als „Gesetze der großen Zahlen". Das schwache und starke Gesetz der großen Zahlen unterscheiden sich voneinander in der Konvergenzart der arithmetischen Mittel und in der Art der Voraussetzungen an die zugrunde liegenden Zufallsgrößen.
Der Grundgedanke der Gesetze der großen Zahlen lässt sich demnach wie folgt formulieren:

Unter welchen Bedingungen an die Zufallsgrößen X_n, $n \geq 1$, konvergiert ihr n-tes arithmetisches Mittel $\overline{X}_n$ in welchem Sinne gegen welchen Grenzwert?

Dieser Vortrag gliedert sich in drei Teile: Im ersten Teil werden wichtige Sätze und Definitionen wiederholt und Vorbereitungen für den zweiten Teil „Das starke Gesetz der großen Zahlen" und den entsprechenden Beweis getroffen. Im dritten Teil schließt sich eine Anwendung des Borel-Cantelli Lemmas und eine Anwendung des starken Gesetzes der großen Zahlen an.

Da im ersten Teil weitestgehend auf Beweise verzichtet wird, sei an dieser Stelle auf das Skript der Vorlesung „Stochastik I" bei Herrn Voit verwiesen, aus dem die Sätze, Definitionen und Lemmata zitiert sind.
Darüberhinaus liegt diesem Vortrag in erster Linie das Buch „Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik" von Ulrich Krengel zugrunde.

I Vorbereitung / Wiederholung

Satz 1.1 : Tschebyscheff - Ungleichung

$X: (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow \mathbb{R}$ ZV'e , $\varepsilon > 0$

$E(X^2) < \infty \Rightarrow P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{Var(X)}{\varepsilon^2}$

1.2 : Das schwache Gesetz der großen Zahlen

$X_1, \dots, X_n \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ unkorreliert mit

- $E(X_i)$
- $Var(X_i) \leq M \quad \forall i = 1, \dots, n$

Sei $\overline{X_n} := 1/n \, (X_1 + \dots + X_n)$ das arithmetische Mittel aus $X_1, \dots, X_n$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : P(|\overline{X}_n - E(X_i)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{M}{\varepsilon^2 n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Definition 1.3 : Konvergenzarten

(i) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert stochastisch gegen X,

(kurz: $X_n \xrightarrow{n \to \infty} X$ stoch.),

falls:

$\forall \varepsilon > 0 : P(\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

(ii) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert fast sicher gegen X,

(kurz: $X_n \xrightarrow{n \to \infty} X$ f.s.),

falls:

$P(\underbrace{\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega)\}}_{=: A}) = 1$

Bemerkung:

Da $\omega \in A \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \; \exists n \in \mathbb{N} \; \forall m \geq n : |X_m(\omega) - X(\omega)| \leq 1/n$

$$\Leftrightarrow \omega \in \underbrace{\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} \underbrace{\{\omega \in \Omega : |X_m(\omega) - X(\omega)| \leq 1/k\}}_{\in \mathcal{A}}}_{\in \mathcal{A}}$$

ist $A \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow P(A)$ macht Sinn

Satz 1.4: Fast sichere Konvergenz impliziert stochastische Konvergenz.

$X_n, X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ ZV'e, $n \in \mathbb{N}$

$X_n \longrightarrow X$ f.s. $\Rightarrow X_n \longrightarrow X$ stoch.

Einschub

Definition: Limes superior, Limes inferior

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$.

Setze:

$\limsup A_n := \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j\geq i} A_j \in \mathcal{A}$ Limes superior der $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ①

$\liminf A_n := \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcap_{j\geq i} A_j \in \mathcal{A}$ Limes inferior der $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Lemma von Fatou

(i) $\limsup A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n$ für ∞-viele $A_n\}$ ②

(ii) $\liminf A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bis auf endlich viele Ausnahmen$\}$

(iii) $\liminf A_n \subset \limsup A_n$

(iv) $P(\liminf A_n) \overset{\mathrm{I}}{\leq} \liminf P(A_n) \overset{\mathrm{II}}{\leq} \limsup P(A_n) \overset{\mathrm{III}}{\leq} P(\limsup A_n)$

Beweis

(i) $\omega \in A_n$ für ∞-viele $n \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow$ Zu jedem $i \in \mathbb{N}$ existiert $j \geq i$ mit $\omega \in A_j$

$\Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\geq i} A_j$

$\overset{①}{\Leftrightarrow} \limsup A_n$

(ii) analog

(iii) klar mit (i) und (ii), denn aus „ω liegt in fast allen Mengen A_n", folgt, dass „ω in unendlich vielen Mengen A_n" liegt.

(iv) II : klar mit Analysis I

III: Sei $B_i := \bigcup_{j>i} A_j$. Dann:

$$B_{i+1} \subset B_i \;\forall i \text{ und } \lim\sup = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i \supset A_i$$

$$\Rightarrow P(\lim\sup A_n) = \lim_{i\to\infty} P(B_i)$$

$$= \lim_{i\to\infty} \sup P(B_i)$$

$$\geq \lim\sup P(A_i)$$

I: analog zu III

$\square$

Beweis zu 1.4

Sei $\varepsilon > 0$, $i \in \mathbb{N}$, $B_i := \{\omega_i : |X_i(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}$

$$\Rightarrow \quad 0 \underset{(iv)\,II}{\leq} \lim\inf P(B_i) \underset{(iv)\,III}{\leq} \lim\sup P(B_i) \leq P(\lim\sup B_i) \overset{(i)+\text{Def. } B_i}{=} P(|X_i - X| \geq \varepsilon \text{ für } \infty\text{-viele } i) \overset{X_i \to X \text{ f.s.}}{=} 0$$

Also: $X_n \to X$ f.s. $\Rightarrow X_n \to X$ stoch.

$\square$

Lemma 1.5 von Borel-Cantelli

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$

$$\lim\sup A_n \overset{②}{=} \{\omega\in\Omega : \omega \in A_n \text{ für } \infty\text{-viele } n\}$$

(i) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, dann ist $P(\lim\sup A_n) = 0$.

(ii) Falls $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ und die A_n unabhängig, dann ist $P(\lim\sup A_n) = 1$.

Beweis

(i) $$0 \leq P(\limsup A_n)$$

$$\overset{(1)}{=} P\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}^{\infty} \bigcup_{j\geq i} A_j\right) \qquad \text{mit } P(A) \leq P(B) \text{ falls } A \subseteq B:$$

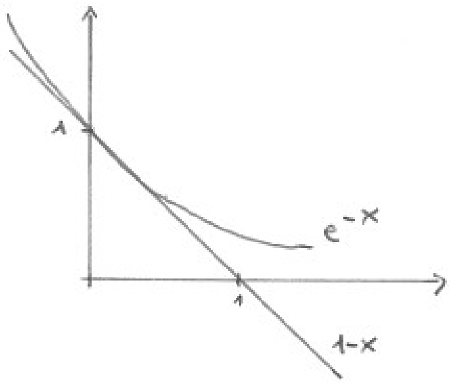
$$\overset{\forall i}{\leq} P\left(\bigcup_{j\geq i} A_j\right)$$

$$\overset{\sigma\text{-Subadditivität}}{\leq} \sum_{j\geq i}^{\infty} P(A_i) \xrightarrow{i\to\infty} 0$$

$$\Rightarrow P(\limsup A_n) = 0$$

□

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}: 1-x \leq e^{-x}$



$\forall 1 \leq m \leq k:$

$$0 \leq \prod_{i=m}^{k} (1 - P(A_i))$$

$$\leq \exp\left(-\sum_{i=m}^{k} P(A_i)\right) \xrightarrow{k\to\infty} e^{-\infty} = 0$$

$$\Rightarrow \prod_{i=n}^{\infty} (1 - P(A_i)) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - P(\limsup A_n)$$

$$\overset{(1)}{=} 1 - \lim_{i\to\infty} P\left(\bigcup_{j\geq i} A_j\right)$$

$$= \lim_{i\to\infty} P\left(\bigcap_{j\geq i} (\Omega \setminus A_j)\right)$$

$$\overset{A_j, \Omega\setminus A_j \text{ unabh.}}{=} \lim_{i\to\infty} \prod_{j\geq i} P(\Omega \setminus A_j)$$

$$= \lim_{i\to\infty} \prod_{j\geq i} (1 - P(A_j))$$

$$= \lim_{i\to\infty} 0$$

$$= 0 \quad \text{(wegen oben)}$$

□

Beispiel zu 1.5 (ii)

In einer Box ist zu Beginn 1 schwarze Kugel. Man ziehe in jedem Schritt eine Kugel, notiere die Farbe und lege diese zurück. Außerdem lege man zusätzlich eine rote Kugel in die Box, d.h. nach der n-ten Ziehung sind n rote Kugeln in der Box.

Sei A_n das Ereignis, dass bei der n-ten Ziehung eine schwarze Kugel gezogen wird, so ist

$$P(A_n) = \frac{1}{n+1}$$

Da die Ziehungen unabhängig sind und die Summe der Zahlen $\frac{1}{n+1}$ divergiert, und somit

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$$

gilt, folgt mit Lemma 1.5 (ii):

$$P(\limsup A_n) = 1$$

Und damit letztendlich, dass die schwarze Kugel fast sicher unendlich oft gezogen wird.

II Das starke Gesetz der großen Zahlen

1.6 : Das starke Gesetz der großen Zahlen

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ unkorrelierte, identisch verteilte, reellwertige ZV'e ③

mit $\mathrm{Var}(X_i) \leq M < \infty \;\forall i \in \mathbb{N}$ ④

Behauptung

$$\overline{Y}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{n\to\infty} 0 \text{ fast sicher}$$

mit $Y_i := X_i - E(X_i)$

Beweis

o.B.d.A. $E(X_i) = 0 \;\forall i \in \mathbb{N}$ ⑤

1. Schritt: Betrachtung einer Teilfolge $\overline{Y}_{n^2}$ der $\overline{Y}_n$

z.z.: $\overline{Y}_{n^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ fast sicher

Nach den Rechenregeln für Varianzen folgt:

$$\mathrm{Var}(\overline{Y}_{n^2}) = \mathrm{Var}\left(\frac{1}{n^2}(X_1+\ldots+X_{n^2})\right) \quad \text{mit } \overline{Y}_{n^2} := \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n^2} Y_i$$

$$= \frac{1}{n^4}\left(\mathrm{Var}(X_1+\ldots+X_{n^2})\right)$$

Rechenregel für Varianzen: $\mathrm{Var}(X_1+\ldots+X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i\neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$
bzw. mit Bienaymé:
Für unabh. $X_1, \ldots, X_n$ gilt $\mathrm{Var}(X_1+\ldots+X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$
und:
Wenn X_i unabh., dann auch unkorreliert.

$$\to = \frac{1}{n^4}\left(\sum_{i=1}^{n^2} \mathrm{Var}(X_i) + \underbrace{\sum_{i\neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)}_{=0}\right)$$

$= 0$, da X_i unkorreliert nach ③, ist für $i \neq j$ $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$

$$= \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{n^2} \underbrace{\mathrm{Var}(X_i)}_{\leq M \text{ nach ④}}$$

$$\leq \frac{M\cdot n^2}{n^4} = \frac{M}{n^2}$$

Also: $\mathrm{Var}(\overline{Y}_{n^2}) \leq \frac{M}{n^2}$ ⑥

Nach den Rechenregeln für Varianzen gilt:

$$\mathrm{Var}(Z) = E(Z^2) - \underbrace{(E(Z))^2}_{\text{hier: } = 0 \text{ (5)}}$$ (7)

hier: $\mathrm{Var}(Z) = E(Z^2)$

$$\mathrm{Var}(\overline{Y}_{n^2}) = E(\overline{Y}_{n^2}^2) \overset{(6)}{\leq} \frac{M}{n^2} < \infty$$

Damit folgt nach Tschebyscheff für $\varepsilon > 0$:

$$\overset{\text{Satz 1.1}}{\Rightarrow} P(|\overline{Y}_{n^2}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(\overline{Y}_{n^2})}{\varepsilon^2} \overset{(6)}{\leq} \frac{M}{n^2 \varepsilon^2}$$

Nach dem schwachen Gesetz der großen Zahlen (1.2) gilt:

$$P(|\overline{Y}_{n^2}| \geq \varepsilon) \leq \frac{M}{n^2 \varepsilon^2} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Dann ist auch die Summe der $P(|\overline{Y}_{n^2}| \geq \varepsilon)$ konvergent:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\overline{Y}_{n^2}| \geq \varepsilon) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2} < \infty$$

Mit dem Lemma 1.5 (i) von Borel-Cantelli folgt für

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\overline{Y}_{n^2}| \geq \varepsilon) < \infty$$

$$\overset{1.5(i)}{\Rightarrow} P(\limsup (|\overline{Y}_{n^2}| \geq \varepsilon)) = 0$$

mit $P(\complement A) = 1 - \underbrace{P(A)}_{=0}$

$$\Leftrightarrow P(\liminf \complement(|\overline{Y}_{n^2}| \geq \varepsilon)) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(\liminf (|\overline{Y}_{n^2}| < \varepsilon)) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(|\overline{Y}_{n^2}| \geq \varepsilon \text{ nur endlich oft}) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$$

Setze $\varepsilon = 1/k$

$$\Leftrightarrow P(|\overline{Y}_{n^2}| \geq 1/k \text{ nur endlich oft}) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow P\Big(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (|\overline{Y}_{n^2}| \geq 1/k \text{ nur endlich oft})\Big) = 1$$

mit $P(\complement A) = 1 - P(A)$

$$\Leftrightarrow 1 - P\Big(\bigcup_{k \in \mathbb{N}}^{\infty} \complement(|\overline{Y}_{n^2}| \geq 1/k \text{ nur endlich oft})\Big) = 1$$

σ-Additivität

$$\Leftrightarrow 1 - \lim_{n \to \infty} P(\complement(|\overline{Y}_{n^2}| \geq 1/k \text{ nur endlich oft})) = 1$$

mit $P(\complement A) = 1 - P(A)$

$$\Leftrightarrow 1 - (1 - \lim_{n \to \infty} P(|\overline{Y}_{n^2}| \geq 1/k \text{ nur endlich oft})) = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} P(|\overline{Y}_{n^2}| \geq 1/k \text{ nur endlich oft}) = 1$$

$$\Leftrightarrow P(|\overline{Y}_{n^2}| \xrightarrow{n \to \infty} 0) = 1$$

$$\Leftrightarrow \overline{Y}_{n^2} \xrightarrow{n \to \infty} \underbrace{0}_{= E(X_i) \text{ (5)}} \text{ fast sicher}$$

2. Schritt: Nachweis der fast sicheren Konvergenz für die Folge $\overline{Y}_n$

Für $m \in \mathbb{N}$ sei nun $n := n(m) \in \mathbb{N}$ (8) mit $n^2 \leq m < (n+1)^2$ (8)

Vergleiche $\overline{Y}_m$ mit $\overline{Y}_{n^2} = \overline{Y}_{n(m)^2}$

Wähle $S_k := \sum_{i=1}^{k} X_i \quad , k \in \mathbb{N}$

Nach den Rechenregeln für Varianzen folgt:

$$\begin{aligned}
Var(S_m - S_{n^2}) &= Var(S_m) - Var(S_{n^2}) \\
&= Var\Big(\sum_{i=1}^{m} X_i\Big) - Var\Big(\sum_{i=1}^{n^2} X_i\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{m} Var(X_i) - \sum_{i=1}^{n^2} Var(X_i) \\
&= \sum_{i=n^2+1}^{m} \underbrace{Var(X_i)}_{\leq M \; (4)} \\
&\leq (m-n^2) \cdot M
\end{aligned}$$

Also: $Var(S_m - S_{n^2}) \leq M \cdot (m-n^2)$ (9)

Wie oben (7) : $Var(S_m - S_{n^2}) = E((S_m - S_{n^2})^2) \overset{(8)}{\leq} M \cdot (m-n^2) < \infty$

Daher folgt mit der Tschebyscheff-Ungleichung für $\varepsilon > 0$:

$$\overset{\text{Satz 1.1}}{\Rightarrow} P(|S_m - S_{n^2}| \geq \varepsilon n^2) \leq \frac{Var(S_m - S_{n^2})}{(\varepsilon n^2)^2} \overset{(9)}{\leq} \frac{M \cdot (m-n^2)}{\varepsilon^2 n^4} \quad (10)$$

Summieren über m, ergibt:

$$\Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{P(|S_m - S_{n^2}| \geq \varepsilon n^2)}_{\overset{(10)}{\leq} \frac{M}{\varepsilon^2} \frac{m-n^2}{n^4}}$$

$$\overset{\text{mit } n := n(m) \, (8)}{\leq} \frac{M}{\varepsilon^2} \sum_{n(m)=1}^{\infty} \sum_{m=n(m)^2}^{(n(m)+1)^2-1} \frac{m-n(m)^2}{n(m)^4} = \frac{M}{\varepsilon^2} \sum_{n(m)=1}^{\infty} {}^{1}\!/_{n(m)^4} \, (1+2+\ldots+2n)$$

$$= \frac{M}{\varepsilon^2} \sum_{n(m)=1}^{\infty} {}^{1}\!/_{n(m)^4} \sum_{i=0}^{2n(m)} i$$

$$= \frac{M}{\varepsilon^2} \sum_{n(m)=1}^{\infty} {}^{1}\!/_{n(m)^4} \; \frac{2n(m)\,(2n(m)+1)}{2} < \infty$$

Also ist die Summe der $P(|S_m - S_{n^2}| \geq \varepsilon n^2)$ konvergent.

Mit dem Lemma 1.5 (i) von Borel-Cantelli folgt für

$$\sum_{m=1}^{\infty} P(|S_m - S_{n^2}| \geq \varepsilon n^2) < \infty$$

$$\overset{n:=n(m) \text{ ⑧}}{\Leftrightarrow} \sum_{m=1}^{\infty} P(|S_m - S_{n(m)^2}| \geq \varepsilon\, n(m)^2) < \infty$$

$$\overset{1.5(i)}{\Rightarrow} P(\limsup (|S_m - S_{n(m)^2}| \geq \varepsilon\, n(m)^2)) = 0$$

$$\overset{\varepsilon = 1/k}{\Leftrightarrow} P(\limsup (1/n(m)^2\, |S_m - S_{n(m)^2}| \geq 1/k)) = 0$$

$$\overset{②}{\Leftrightarrow} P(1/n(m)^2\, |S_m - S_{n(m)^2}| \geq 1/k \text{ für } \infty\text{-viele } m) = 0$$

$$\overset{\text{mit } P(\complement A) = 1 - \underbrace{P(A)}_{=0}}{\Leftrightarrow} P(\liminf \complement (1/n(m)^2\, |S_m - S_{n(m)^2}| \geq 1/k)) = 1$$

tz 1.4, lemma (ii)

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{1}{n(m)^2} |S_m - S_{n(m)^2}| \geq 1/k \text{ für höchstens endlich viele } m\right) = 1$$

$\forall k \in \mathbb{N}$

Nach dem 1. Schritt wissen wir, dass

$$P\left(\frac{|S_{n(m)^2}|}{n(m)^2} \geq 1/k \quad \text{für höchstens endlich viele } m\right) = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Zusammen mit der Dreiecksungleichung und der Implikation $P(A) = P(B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = 1$ ergibt das:

$$\Rightarrow P\left(\underbrace{\frac{1}{n(m)^2}}_{m \geq n(m)^2 \text{ ⑧}} |S_m| \geq 1/k \text{ nur endlich oft}\right) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow P\left(\underbrace{\frac{|S_m|}{m}}_{= |\overline{Y}_m|} \geq 1/k \text{ nur endlich oft}\right) = 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow P(|\overline{Y}_m| \geq 1/k \text{ nur endlich oft}) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow P\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}}^{\infty} (|\overline{Y}_m| \geq 1/k \text{ nur endlich oft})\right) = 1$$

$$\overset{\text{mit } P(\complement A) = 1 - P(A)}{\Leftrightarrow} 1 - P\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}}^{\infty} \complement (|\overline{Y}_m| \geq 1/k \text{ nur endlich oft})\right) = 1$$

$$\overset{\sigma\text{-Additivität}}{\Leftrightarrow} 1 - \lim_{n \to \infty} P(\complement (|\overline{Y}_m| \geq 1/k \text{ nur endlich oft})) = 1$$

$$\overset{\text{mit } P(\complement A) = 1 - P(A)}{\Leftrightarrow} 1 - (1 - \lim_{n \to \infty} P(|\overline{Y}_m| \geq 1/k \text{ nur endlich oft})) = 1$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} P(|\overline{Y}_m| \geq 1/k \text{ nur endlich oft}) = 1$$

$\Leftrightarrow \; P(|\overline{Y}_m| \xrightarrow{m \to \infty} 0) = 1$

$\Leftrightarrow \; \overline{Y}_m \xrightarrow{m \to \infty} 0$ fast sicher

Also konvergiert das betrachtete arithmetische Mittel $\overline{Y}_m(\omega)$ für $m \to \infty$ fast sicher gegen 0. ■

Damit ist das starke Gesetz der großen Zahlen bewiesen.

□

Bemerkung:

Es existieren auch noch andere Versionen des starken Gesetzes der großen Zahlen.
So wird in der Version nach Etemadi-Kolmogorov auf die Forderung endlicher Varianzen verzichtet und das starke Gesetz der großen Zahlen lautet dann:

Jede Folge (X_n) paarweise unabhängiger, identisch verteilter, reellwertiger ZV'en auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit endlichen Erwartungswerten genügt dem starken Gesetz der großen Zahlen:

$$\lim_{n \to \infty} 1/n \sum_{i=1}^{n} X_i = E(X_1) \text{ fast sicher}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{1/n \sum_{i=1}^{n} X_i}_{\text{arithmetisches Mittel}} \xrightarrow{n \to \infty} E(X_1) \text{ fast sicher}$$

Die Betrachtung endlicher Varianzen, d.h. der zweiten Momente von X (denn nach Voraussetzung: $E(X_i) = 0$ ⑤) in unserem Beweis ermöglichte jedoch eine weniger komplizierte Beweisführung.

III Anwendungen

1.7: The infinite monkey theorem

(Eine Anwendung des Borel-Cantelli Lemmas 1.5 (ii))

Das infinite monkey theorem besagt, dass ein einzelner Affe, der unendlich lange auf einer Tastatur herumtippt, fast sicher irgendwann alle Bücher der Nationalbibliothek Frankreichs schreiben wird. In englischsprachigen Ländern geht man davon aus, dass so irgendwann die Werke Shakespeares entstehen werden.
Die Formulierung des Theorems soll für Erstaunen sorgen und ist aus diesem Grund sehr bildlich ausgedrückt.
Das Symbol des Affen repräsentiert den Zufallscharakter.
So scheiterte auch ein 1 Monat langes Projekt mit den sechs Makaken Elmo, Gum, Heather, Holly, Mistletoe und Rowan in einem Zoo in England. Mit der in ihrem Käfig untergebrachten Computertastatur entstanden lediglich 5 Seiten PDF-Text, der hauptsächlich den Buchstaben „S" enthielt. Als auch mit dem Stein, mit dem sie auf die Tastatur einschlugen, keine Reaktion erzielt wurde, funktionierten die Affen kurzerhand die Tastatur zu ihrer Toilette um.
Die Übertragung des Theorems auf die Realität scheitert demnach. Die empirische Beweisbarkeit des infinite monkey theorems ist ausgeschlossen.
Dennoch ist das Theorem wissenschaftlichen Ursprungs und hat einen mathematischen Hintergrund: Es verdeutlicht in Form eines Beispiels eine Aussage der Wahrscheinlichkeitstheorie, das Lemma von Borel-Cantelli.

Man betrachte das Ereignis A.

$A = \{$ein unsterblicher Affe tippt auf Schreibmaschine unendlich oft ein bestimmtes Buch$\}$

Das Buch enthalte K Zeichen / Buchstaben.

Die Schreibmaschine habe N Tasten, die voneinander unabhängig sind und identisch verteilt.

Der Affe tippt eine zufällige Zeichenfolge unendlicher Länge.

Nun unterteile man diese zufällige Zeichenfolge unendlicher Länge willkürlich in Blöcke von der Länge der betrachteten Zeichenfolge endlicher Länge – da wir hier das Buch mit K Zeichen betrachten also in Blöcke der Länge K.

Dann gibt es nach A unendlich viele Blöcke der Länge K, in denen das Buch geschrieben ist. Damit gibt es dann auch unendlich viele $n_1 \in \mathbb{N}$ und ab der Stelle n_1 (= 1. Buchstabe des Buches) ist das Buch geschrieben.

$B := \{\exists \infty\text{-viele } n_1 \in \mathbb{N} : \text{ab der Stelle } n_1 \text{ ist das Buch geschrieben}\}$

$B \subset A$

$$\underbrace{\ldots kzp \ldots tua}_{K} | \underbrace{xb \ldots tqo}_{K} | \underbrace{\text{eswareinmal} \ldots \text{nochheute}}_{K} | \ldots$$

$n_1 n_2 n_3 n_4 \ldots \qquad n_k$

$$\prod_{i=1}^{k} P(\text{Affe tippt i-ten Buchstaben des Buches})$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{N} = \frac{1}{N^k}$$

Das Eintreten jedes Einzelereignisses aus der Folge der zufälligen, unabhängigen Ereignisse (B_n) hat die gleiche Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{N^k}$$

Die Summe über die unendlich vielen konstanten Summanden $P(B_n)$ ist unendlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{N^k} = \infty$$

Da die $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig sind, gilt Lemma 1.5 (ii) von Borel-Cantelli:

Also:

$$\Rightarrow P\underbrace{(\limsup B_n)}_{} = 1$$

= unendlich viele der B_n treten ein

= Es existieren unendlich viele $n_1 \in \mathbb{N}$: ab der Stelle n_1 ist das Buch geschrieben

$\Rightarrow P$(ein unsterblicher Affe tippt auf Schreibmaschine unendlich oft ein bestimmtes Buch) = 1

Ein Affe kann also mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit jeden beliebigen Text, der jemals geschrieben wurde oder auch in der Zukunft jemals geschrieben werden wird, tippen, wenn er nur unendlich viel Zeit zur Verfügung gestellt bekommt!

1.8 : Das Buffonsche Nadelexperiment

(Eine Anwendung des starken Gesetzes der großen Zahlen)

Buffon sorgte in Expertenkreisen für Aufsehen, da er mit seinem Nadelproblem eine experimentelle Möglichkeit aufgezeigt hatte, die Zahl π zu approximieren.

In einer Ebene seien parallele Geraden gezogen, die alle zueinander den gleichen Abstand d haben.
Nun wird eine Nadel der Länge l willkürlich und zufällig auf diese Ebene geworfen.

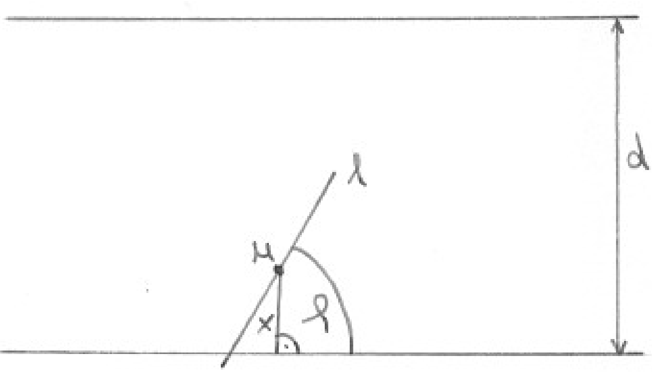
Mit welcher Wahrscheinlichkeit schneidet die Nadel eine der Parallelen?

Mögliche Positionen der Nadel auf der Ebene sind ein Schnittpunkt mit einer der Geraden, kein Schnittpunkt oder die identische Lage von Nadel und Gerade.

Man unterscheidet zwei Fälle: $l < d$ oder $l > d$
($l = d$ ist Spezialfall der beiden Fälle).
Hier wird der Fall $l < d$ betrachtet, so dass die Nadel höchstens eine Gerade schneidet.

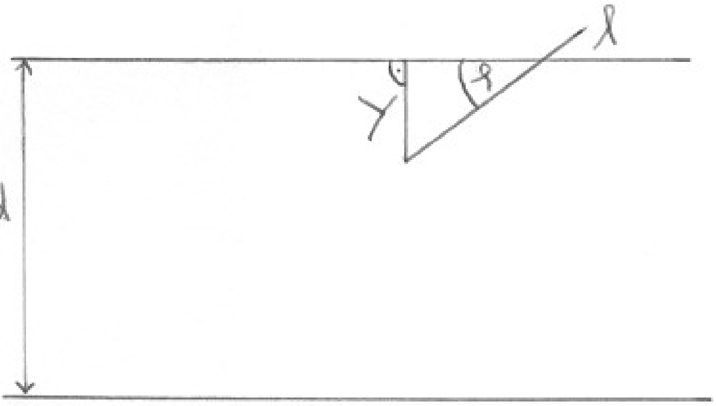
Die geometrische Lage der Nadel lässt sich durch die Orientierung am Nadelmittelpunkt oder an der Nadelspitze beschreiben. Die Idee ist jedoch bei beiden Betrachtungen gleich: Durch den Winkel φ und X bzw. Y kann jede beliebige Position der Nadel eindeutig bestimmt werden.

Betrachtung des Mittelpunktes der Nadel



X sei der Abstand des Mittelpunktes der Nadel von derjenigen Geraden, die ihm am nächsten liegt; φ sei der Winkel, den die Nadel mit dieser Geraden einschließt.

Betrachtung der Nadelspitze



Y sei der Abstand zwischen dem tiefsten Punkt der Nadel und der nächst höheren Parallele, φ sei der Winkel, den die Nadel mit dieser Geraden einschließt.

Wir betrachten hier den Mittelpunkt der Nadel.

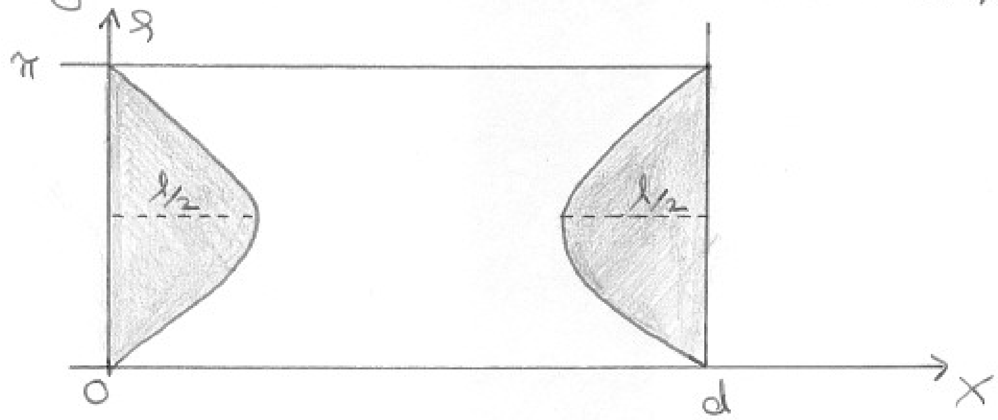
Dreht man die Nadel im Uhrzeigersinn um den Winkel φ, so erhält die Nadel eine parallele Lage zu den Geraden.

Dabei gilt für φ: $\quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

Und für X: $\quad 0 \leq x \leq d$

Die Lage der Nadel kann also durch einen Punkt in der Menge der möglichen Zustände (x, φ) repräsentiert werden, wobei x und φ unabhängig voneinander sind. Wir nehmen an, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung in dieser Menge gleichmäßig ist. Die Lage der Nadel wird nicht durch Magnetfelder oder ähnliches beeinflusst.

Übertragen wir die Situation in ein Koordinatensystem:



Die Nadel schneidet nur dann eine der Geraden $x = 0$ oder $x = d$, wenn der die Lage der Nadel repräsentierende Punkt links bzw. rechts der Sinuskurven mit den Amplituden $l/2$ liegt, die wir über die Geraden $x = 0$ und $x = d$ gezogen haben.

D.h.:
Ist φ bereits festgelegt, so schneidet die Nadel dann eine Gerade, wenn

$$0 \leq x \leq \frac{l}{2} \sin \varphi \quad \text{oder} \quad d - \frac{l}{2} \sin \varphi \leq x \leq d$$

gilt.

Der Flächeninhalt der schraffierten Fläche berechnet sich wie folgt:

$$2 \cdot \int_0^{\pi} \frac{l}{2} \sin \varphi \, d\varphi = 2 \cdot \frac{l}{2} \left[-\cos \varphi \right]_0^{\pi} = \frac{4l}{2} = 2l$$

Der Flächeninhalt des gesamten Rechtecks beträgt:

$\pi \cdot d$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine der Geraden schneidet, berechnet sich demnach:

$$P(A) = \frac{2l}{\pi d}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich nun eine Methode zur experimentellen Bestimmung der Zahl π, die auf dem starken Gesetz der großen Zahlen beruht.

Seien $X_1, X_2, \dots$ mit

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \le \frac{l}{2}\sin\varphi \text{ oder } d - \frac{l}{2}\sin\varphi \le x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

unabhängige und identisch verteilte ZV'en mit dem Erwartungswert

$$E(X_i) = \frac{2l}{\pi d}$$

Mit dem starken Gesetz der großen Zahlen folgt:

$$\underbrace{\overline{Y}_n}_{=\text{ arithmetisches Mittel}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{n \to \infty} \frac{2l}{\pi d} \quad \text{fast sicher}$$

D.h.: Für große n ist $\frac{2l}{\overline{Y}_n \cdot d}$ mit hoher Wahrscheinlichkeit eine gute Näherung der Zahl π!