Überlebensdauerverteilung (Sterbetafeln)

Motivation der Thematik

In einem afrikanischen Land sterben bis zum Alter von 50 Jahren 20% der Neugeborenen an Malaria, 15% an Herzversagen und 40% an anderen Ursachen. Nur ein Viertel der Neugeborenen erreicht das 50. Lebensjahr.

Wenn Malaria ausgerottet werden kann (bspw. durch medizinschen Fortschritt), welcher Anteil der Neugeborenen erreicht dann das 50. Lebensjahr?
Wie hoch wird dann der Anteil von Neugeborenen sein, die bis zum 50. Lebensjahr an Herzversagen sterben?

Lebensdauermodelle und "Konkurrierende Risiken"

Solche Aufgabenstellungen mit dem Thema konkurrierende Risiken (jedes Individuum ist gleichzeitig k Risiken ausgesetzt, die gewissermaßen um sein Leben konkurrieren) sollen in diesem Vortrag behandelt werden. Auf das obige Beispiel wird am Ende des Vortrags detaillierter eingegangen.

Definition

T:=Lebensdauer einer Einheit (technisches System, biologisches System (Individuum), etc.)

Definition

Die Funktion

$$R : t \mapsto R(t) \;\; mit \;\; R(t) := P(T > t) \qquad t > 0$$

heißt Überlebenswahrscheinlichkeit oder Überlebensfunktion (speziell bei technischen Systemen auch Zuverlässigkeit) und gibt den Anteil der im Alter t noch Lebenden an.

Definition

Vor.: Es existiert eine Dichte.
Die Funktion

$$\lambda : t \mapsto \lambda(t) \;\; mit \;\; \lambda(t) := \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P(t < T \leq t + h \mid T > t)$$

heißt Ausfallrate.

Für eine Einheit mit Ausfallrate $\lambda(t)$ entspricht $h\lambda(t)$ bis auf einen Fehler der Ordnung $O(h^2)$ der Wahrscheinlichkeit, dass die Einheit nach Erreichen des Lebensalters t innerhalb eines Zeitintervalls der Länge h ausfällt.

Definition

Die Funktion

$$F : t \mapsto F(t) \;\; mit \;\; F(t) := P(T \leq t) = 1 - R(t) \qquad t > 0$$

wird definiert als die Verteilungsfunktion.
Voraussetzung: F ist stetig differenzierbar.

Definition

Die Funktion

$$f : t \mapsto f(t) \;\; mit \;\; f(t) := F'(t) \qquad t \geq 0$$

ist die zur Verteilungsfunktion gehörende Dichte.

Behauptung

Mittels der Verteilungsfunktion F und der Dichte f kann man die Ausfallrate darstellen als $\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$

Beweis

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P(t < T \leq t + h \mid T > t) \\ (bed.W'keit) &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \frac{P(t < T \leq t + h)}{P(T > t)} \\ &= \lim_{h \downarrow 0} [\frac{1}{R(t)} \frac{F(t+h) - F(t)}{h}] \\ &= \frac{f(t)}{R(t)} \end{aligned}$$

Behauptung

Durch die Ausfallrate ist die Lebensdauerverteilung eindeutig bestimmt.

Beweis

Es besteht folgender Zusammenhang:

$$\lambda(t) = -\frac{d}{dt} lnR(t)$$

(äußere Ableitung: $\frac{1}{R(t)}$; innere Ableitung: $R'(t) = (1-F(t))' = -f(t) \rightarrow$ ergibt zusammen wieder $\lambda = \frac{f(t)}{R(t)}$)

Für viele technische und biologische Systeme hat die Ausfallrate eine ähnliche Verlaufsform. Eine typische Ausprägung ist im Diagramm (siehe Anhang) dargestellt. Das Diagramm wird im Folgenden "Badewannendiagramm" genannt. Die erhöhte anfägliche Ausfallrate (Frühausfälle) ist auf Produktionsfehler (technischer Systeme) oder ernste Kinderkrankheiten (bei Menschen) zurückzuführen. Die stark ansteigende Ausfallrate im fortgesetzteren Lebensalter ist eine Folge von zunehmender Abnutzung und Altersschwäche (Verschleißausfälle). In einem mittleren Bereich (Zufallsausfälle) kann die Ausfallrate oft in guter Näherung als konstant angesehen werden.
Als Beispiel für eine Ausfallrate mit dem charakteristischen Verlauf von oben beschriebenem Diagramm kann auch die Lebensdauer in einer menschlichen Population dienen.

Definition: "Sterbetafel"

Untersuchungen über die "Sterblichkeit" der Bevölkerung (u.a. durch versicherungsmathematische Fragestellungen motiviert) werden in so genannten Sterbetafeln festgehalten. Das Kernstück einer Sterbetafel besteht aus einer Verteilungsfunktion und der zugehörigen Dichte. Wir betrachten eine Gesamtheit gleichartiger Einheiten. Sterbetafeln geben den Anteil der im Alter t noch Lebenden Einheiten an.
Eine empirisch ermittelte Sterbetafel kann nur als Tabelle wiedergegeben werden (da ihr Verlauf kaum durch einfache Funktionen zu beschreiben ist). Der besseren Übersichtlichkeit wegen rechnet die Sterbetafel nicht mit Anteilen oder Prozenten, sondern geht von einer fiktiven Bevölkerung von 100000 aus, wodurch Dezimalstellen vermieden werden.
Die erste mathematisch fundierte Analyse des Sterbegeschehens ist wohl die des (nach England emigrierten deutschen) Astronomen Halley (1693), durchgeführt anhand von Geburts- und Sterbestatistiken der Stadt Breslau. (vgl. Pfanzagel, 1988)

Solche Sterbetafeln werden für die Bundesrepublik Deutschland vom Statistischen Bundesamt herausgegeben.

Definition: "Sterbewahrscheinlichkeit"

$$\begin{aligned}\overline{\lambda} : t \mapsto \overline{\lambda}(t) & \\ mit & \\ \overline{\lambda}(t) &:= \frac{R(t) - R(t+1)}{R(t)} \\ &= \frac{1 - F(t) - (1 - F(t+1))}{R(t)} \\ &= \frac{F(t+1) - F(t)}{R(t)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\quad &= \quad \frac{\int_t^{t+1} f(\tau)d\tau}{R(t)}) \\
&= \quad \frac{1}{R(t)} \frac{F(t+1)-F(t)}{t+1-t} \\
(MWS) \quad &= \quad \frac{f(\tau^*)}{R(t)} \qquad mit \;\; \tau^* \in]t, t+1[
\end{aligned}
$$

Durch die Anwendung des Mittelwertsatzes kann man die Sterbewahrscheinlichkeit als eine Approximation für die Ausfallrate $\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$ ansehen. Stellt man die Sterbewahrscheinlichkeit $\overline{\lambda}(t)$ in einem Diagramm dar, so ergibt sich annähernd eine Kurve mit dem Verlauf wie im oben beschriebenen ("Badewannendiagramm").

Definition: "bedingte Verteilung der weiteren Lebensdauer"

F_τ ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand zwischen τ und $\tau + t$ stirbt unter der Bedingung, dass er schon älter als τ ist.

$$
\begin{aligned}
F_\tau : t \mapsto F_\tau(t) & \\
mit & \\
F_\tau(t) \quad &:= \quad P(T - \tau \leq t \mid T > \tau) \\
&= \quad P(T \leq \tau + t \mid T > \tau) \\
&= \quad \frac{P(\{T \leq \tau + t\} \cap \{T > \tau\})}{P(T > \tau)} \\
&= \quad \frac{P(\tau < T \leq \tau + t)}{P(T > \tau)} \\
&= \quad \frac{F(\tau + t) - F(\tau)}{R(\tau)}
\end{aligned}
$$

Definition: "bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit"

$$
\begin{aligned}
R_\tau : t \mapsto R_\tau(t) & \\
mit & \\
R_\tau(t) \quad &:= \quad P(T - \tau > t \mid T > \tau) \\
&= \quad P(T > t + \tau \mid T > \tau) \\
&= \quad \frac{P(\{T > t + \tau\} \cap \{T > \tau\})}{P(T > \tau)} \\
&= \quad \frac{P(T > t + \tau)}{P(T > \tau)} \\
&= \quad \frac{R(t + \tau)}{R(\tau)}
\end{aligned}
$$

Konzept der Alterung

An diese Begriffsbildungen lässt sich ein Konzept der Alterung knüpfen. Eine Einheit altert in einem Intervall $[t_1, t_2]$, wenn für alle $t > 0$ die bedingte Überlebenswahrscheinlichkeit R_τ in $[t_1, t_2]$ streng monoton fällt.

Definition "bedingte weitere Lebenserwartung"

Der bedingte Erwartungswert $E(T-\tau \mid T > \tau)$ heißt bedingte weitere Lebenserwartung:

$$
\begin{aligned}
E(T-\tau \mid T > \tau) &= E(T \mid T > \tau) - \tau \cdot E(1 \mid T > \tau) \\
&= \frac{\int_\Omega 1_{\{T>\tau\}} \cdot T dP}{R(\tau)} - \tau \quad (Trafosatz, Dichtef) \\
&= \frac{1}{R(\tau)} \int_{]-\infty,\infty[} 1_{[\tau,\infty[}(t) \cdot tf(t)dt - \tau \\
&= \frac{1}{R(\tau)} \int_\tau^\infty tf(t)dt - \tau \\
&= \frac{1}{R(\tau)} [\int_\tau^\infty tf(t)dt - \tau R(\tau)] \\
&=^* \frac{1}{R(\tau)} \int_\tau^\infty R(t)dt \\
&= \frac{1}{R(\tau)} \int_0^\infty R(t+\tau)dt
\end{aligned}
$$

Beweis von (*) in (37 → 38)

$$
z.Z.: \int_\tau^\infty t d\mu(t) - \tau R(\tau) \quad = \quad \int_\tau^\infty R(t)dt
$$

ν sei Maß ≥ 0, beschränkt - hier: ν Maß auf $[0, \infty[$

$$
\begin{aligned}
\nu &:= \mu \mid_{[\tau,\infty[}, \ \mu \ hat \ Dichte \ f \\
\Lambda &:= \{(t,x) : 0 \leq x < t\} \\
\Lambda_x &:= \{t : (x,t) \in \Lambda\} = [x, \infty[\\
{}_t\Lambda &:= \{x : (x,t) \in \Lambda\} = [0, t] \\
t &= \lambda^1[0,t] = \lambda^1({}_t\Lambda) \\
\int_0^\infty t d\nu(t) &\ (= \int_\tau^\infty t d\mu(t)) \\
&= \int_0^\infty \lambda^1[0,t] d\nu(t) \\
(Fubini) &= (\nu \otimes \lambda^1 \mid_{[0,\infty[})\{(t,x) : 0 \leq x < t\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& = && (\nu \otimes \lambda^1 \mid_{[0,\infty[})(\Lambda) \\
(Fubini) & = && \int_0^\infty \nu(\Lambda_x) d\lambda^1 \mid_{[0,\infty[} (x) \\
& = && \int_0^\infty \nu(\Lambda_x) dx \\
& = && R(\tau) \cdot \tau + \int_{[\tau,\infty[} R(x)dx \\
(da \quad \nu = \mu \mid_{[\tau,\infty[} \quad ist \quad \nu(x,\infty) & = && \{ {}^{\mu(x,\infty)=R(x) \quad x \geq \tau}_{\mu(\tau,\infty)=R(\tau) \quad 0<x<\tau}) \\
und \;\; damit \int_0^\infty t d\nu(t) - \tau R(t) & = && \int_\tau^\infty R(t)dt
\end{aligned}
$$

Satz

Sei $\tau \in]t, \infty[$. $\tau \mapsto \lambda(\tau)$ monoton steigend. $\Rightarrow \tau \mapsto E(T - \tau \mid T > \tau)$ monoton fallend.

Beweis

Vor.: F Verteilungsfunktion, f Dichte, $R = 1 - F$, $R' = -f$ und $\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)}$
(zur Untersuchung des Monotnoieverhaltens wird die Ableitung gebildet)

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} \frac{R(s+\tau)}{R(\tau)} & = \frac{\frac{d}{d\tau} R(s+\tau) \cdot R(\tau) - R(s+\tau) \cdot \frac{d}{d\tau} R(\tau)}{R(\tau)^2} \\
& = \frac{-f(s+\tau) \cdot R(\tau) + f(\tau) \cdot R(s+\tau)}{R(\tau)^2} \\
& = \frac{-f(s+\tau)}{R(\tau)} + \frac{f(\tau) \cdot R(s+\tau)}{R(\tau)^2} \\
& = \frac{-f(s+\tau)}{R(s+\tau)} \cdot \frac{R(s+\tau)}{R(\tau)} + \frac{f(\tau)}{R(\tau)} \cdot \frac{R(s+\tau)}{R(\tau)} \\
& = -\lambda(s+\tau) \cdot \frac{R(s+\tau)}{R(\tau)} + \lambda(\tau) \cdot \frac{R(s+\tau)}{R(\tau)} \\
& = -[\lambda(s+\tau) - \lambda(\tau)] \frac{R(s+\tau)}{R(\tau)} \\
& \leq 0 \qquad \forall s > 0, \forall \tau > t.
\end{aligned}
$$

Also ist für alle $s > 0$ der Quotient $R(s+\tau)/R(\tau)$ monoton fallend in $]\tau, \infty[$ und dasselbe gilt auch für die bedingte weitere Lebenserwartung:

$$
\tau \mapsto E(T - \tau \mid T > \tau) = \int_0^\infty \frac{R(s+\tau)}{R(\tau)} ds.
$$

Analoges Vorgehen bei monoton fallender Ausfallrate und monoton steigender weiterer Lebenserwartung.

Weibull-Verteilungen

Für die Analyse von Lebensdauerverteilungen und Alterungsprozessen stehen zahlreiche Modelle zur Verfügung. Eine häufig eingesetzte parametrische Verteilungsklasse ist die Familie der Weibull-Verteilungen deren Dichte durch

$$f(t) = \alpha\beta(\alpha t)^{\beta-1}e^{-(\alpha t)^\beta} \cdot 1_{[0,\infty[}(t), \qquad \alpha > 0, \beta > 0,$$

gegeben sind. Die zugehörigen Verteilungsfunktionen und Ausfallraten sind

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t f(s)ds \\ &= \int_0^t \alpha\beta(\alpha s)^{\beta-1}e^{-(\alpha s)^\beta} ds \\ &= \frac{\alpha\beta(\alpha t)^{\beta-1}e^{-(\alpha t)^\beta}}{-\alpha\beta(\alpha t)^{\beta-1}} + 1 \\ &= 1 - e^{-(\alpha t)^\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{f(t)}{R(t)} \\ &= \frac{f(t)}{1-F(t)} \\ &= \frac{\alpha\beta(\alpha t)^{\beta-1}e^{-(\alpha t)^\beta}}{1-(1-e^{-(\alpha t)^\beta})} \\ &= \alpha\beta(\alpha t)^{\beta-1}. \end{aligned}$$

Die Weibull-Verteilung hat eine streng monoton wachsende bzw. fallende Ausfallrate, wenn $\beta > 1$ bzw. wenn $\beta < 1$ ist. Als Spezialfall tritt in der Weibull-Familie für $\beta = 1$ die Familie der Exponentialverteilungen auf. Ihre Ausfallraten sind konstant und sie ist die einzige Verteilungsfamilie mit dieser Eigenschaft (vgl. Gedächtnislosigkeit $\rightarrow$ Stochastik I, oder siehe oben: die Lebensdauerverteilung ist durch die Ausfallrate eindeutig bestimmt).

Eine Modifikation der Weibull-Familie ist die Klasse von Verteilungen mit Ausfallraten

$$\lambda(t) = \alpha\beta(\alpha t)^{\beta-1}e^{\alpha\beta t}, \qquad \alpha > 0, \beta > 0.$$

Für $\beta = 1/2$ kommt man dem typischen Verlauf des zu Beginn des Vortrags beschriebenen "Badewannendiagramms" nahe. Modelle mit dieser Ausfallrate sind aber in der Regel analytisch schwerer zu handhaben als solche, die auf Mitgliedern der Weibull-Familie aufbauen.

Population mit k Todesursachen

In einer Population sei jedes Mitglied k Risiken U_1,...,U_k ausgesetzt, an denen die Anteile α_1,...,α_k der Neugeborenen bis zum Alter m sterben. Sei T_i die hypothetische Lebensdauer eines Individuums, wenn nur das Risiko U_i wirkt, sowie R_i und λ_i die Überlebensfunktion und die Ausfallrate von T_i.
Frage: Wie verändern sich die Anteile α_i bei sich ändernden Ausfallraten λ_i?
Problem: Zufallsgrößen T_1,...,T_k können nicht beobachtet werden.
Beobachtbar sind nur die Lebensdauer $T = \min\{T_1, ..., T_k\}$ und die Todesursache sind beobachtbar.
Vereinfachung: Annahme, die Todesursachen beeinflussen sich nicht gegenseitig.
Die T_i werden daher als unabhängige Zufallsgrößen angenommen.
In Wirklichkeit spiegelt diese Annahme meist eine Approximation wieder, doch wird die weitere Analyse dadurch handlicher. Im Folgenden seien F,R,λ Verteilungsfunktion, Überlebensfunktion und Ausfallrate von T.

Satz

(a) $R(t) = \prod_{i=1}^{k} R_i(t)$
(b) $\lambda(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t)$

Beweis

(a)
T_i unabhängig $\Rightarrow$

$$R(t) = P(T > t) = P(\min\{T_1, ..., T_k\} > t) = \prod_{i=1}^{k} P(T_i > t) = \prod_{i=1}^{k} R_i(t)$$

(b)

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= -\frac{d}{dt} lnR(t) \\ &= -\frac{d}{dt} ln \prod_{i=1}^{k} R_i(t) \\ \left(\frac{Logarithmusgesetz}{\ln(u \cdot v) = \ln(u) + \ln(v)}\right) \quad &= \sum_{i=1}^{k} -\frac{d}{dt} lnR_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t) \end{aligned}$$

Es kann nun ermittelt werden, welchen Einfluss etwaige Veränderungen einer oder mehrerer der Ausfallraten λ_i auf die Verteilung der Lebensdauer T haben.

Definition "neue Lebensdauer"

$T^* = \min\{T_1, ..., T_{j-1}, T_{j+1}, ..., T_k\}$

Behauptung

Kann eine Todesursache U_j vollständig eliminiert werden, dann ist die Verteilungsfunktion der neuen Lebensdauer T^*:

$$F^*(t) = 1 - exp(-\sum_{i=1 i\neq j}^{k} \int_0^t \lambda_i(\tau) d\tau)$$

Beweis

Voraussetzungen $(*)$ bis $(***)$

$$\begin{aligned}(*)\lambda(t) = -\frac{d}{dt}\ln R(t) &\Leftrightarrow \int_0^t \lambda(\tau)d\tau = -\ln R(t)\\ &\Leftrightarrow -\int_0^t \lambda(\tau)d\tau = \ln R(t)\\ &\Leftrightarrow R(t) = \exp(-\int_0^\tau \lambda d\tau)\end{aligned}$$

$$(**)R(t) = \prod_{i=1}^{k} R_i(t)$$

$$(***)\lambda(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow F^*(t) = 1 - \prod_{i=1, i\neq j}^{k} R_i(t) &= 1 - \exp(-\int_0^t \sum_{i=1, i\neq j}^{k} \lambda_i(\tau)d\tau)\\ &= 1 - \exp(-\sum_{i=1, i\neq j}^{k} \int_0^t \lambda_i(\tau)d\tau)\end{aligned}$$

Definition

$J : \Omega \to \{1, ..., k\}$ Zufallsvariable
$J(\omega) = j \Leftrightarrow T_j(\omega) = \min\{l : T(\omega) = T_l(\omega)\}, l \in \{1, ..., k\}$
Möglichkeit doppelt auftretender Werte wird durch Wahl des kleinsten dieser Werte gelöst.

Definition "bedingte Wahrscheinlichkeit des Ablebens im Intervall $[t, t+h]$"

$$\begin{aligned} \lambda_{j,U}(t) &:= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P(\{t < T_j \leq t+h\} \cap \bigcap_{i=1\ i \neq j}^{k} \{T_i > t\} \mid \bigcap_{i=1}^{k} \{T_i > t\}) \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P(\{t < T_j \leq t+h\} \cap \bigcap_{i=1\ i \neq j}^{k} \{T_i > t\} \mid T > t). \end{aligned}$$

Definition "Anteil der Todesfälle aufgrund von U_i bis zur Zeit t"

$$P(T \leq t \cap J = j) = \int_0^t \lambda_{j,U}(s) R(s) ds =: P_{j,U}(t) \tag{1}$$

(Integral über die unbedingte Wahrscheinlichkeit des Ablebens im Intervall [t,t+h])

Definition "Gesamtanteil der Todesfälle aufgrund von Ursache U_i"

$$p_{j,U} := P(J = j) = P(T < \infty \cap J = j) = \int_0^\infty \lambda_{j,U}(t) R(t) dt = P_{j,U}(\infty)$$

Behauptung

$$F(t) = \sum_{j=1}^{k} P_{j,U}(t)$$

Beweis

$F(t) = P(T \leq t) = \sum_{j=1}^{k} P(T \leq t \cap J = j) = \sum_{j=1}^{k} P_{j,U}(t).$

Satz

U_j unabhängig $\Rightarrow \lambda_{j,U}(t) = \lambda_j(t)$

Beweis

$$\begin{aligned} \lambda_{j,U}(t) &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P(\{t < T_j \leq t+h\} \cap \bigcap_{i=1\ i \neq j}^{k} \{T_i > t\} \mid \bigcap_{i=1}^{k} \{T_i > t\}) \\ &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P(\{t < T_j \leq t+h\} \cap \bigcap_{i=1\ i \neq j}^{k} \{T_i > t\} \mid (T > t)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \frac{P(\{t < T_j \le t+h\} \cap \bigcap_{i=1\ i\neq j}^{k} \{T_i > t\}}{P(T > t)} \\
& = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{hR(t)} P(\{t < T_j \le t+h\} \cap \bigcap_{i=1\ i\neq j}^{k} \{T_i > t\} \\
(unabh.) & = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{hR(t)} P(\{t < T_j \le t+h\}) P(\bigcap_{i=1\ i\neq j}^{k} \{T_i > t\}) \\
& = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{hR(t)} [F_j(t+h) - F_j(t)] \prod_{i=1 i\neq j}^{k} R_i(t) \\
& = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{hR(t)} [R_j(t) - R_j(t+h)] \prod_{i=1 i\neq j}^{k} R_i(t) \\
& = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{R_j(t)} \frac{R_j(t) - R_j(t+h)}{h} \\
& = \lambda_j(t).
\end{aligned}
$$

Beispiel

In einem afrikanischen Land sterben bis zum Alter von 50 Jahren 20% der Neugeborenen an Malaria, 15% an Herzversagen und 40% an anderen Ursachen. Nur ein Viertel der Neugeborenen erreicht das 50. Lebensjahr.

Wenn Malaria ausgerottet werden kann, welcher Anteil der Neugeborenen erreicht dann das 50. Lebensjahr?
Wie hoch wird dann der Anteil von Neugeborenen sein, die bis zum 50. Lebensjahr an Herzversagen sterben?

Die drei zum Tode führenden Risiken (Malaria, Herzversagen, Sonstiges) werden als unabhängig angenommen. Die zugehörigen Ausfallraten werden durch Konstanten λ_i, i=1,...,3 approximiert, die allerdings unbekannt sind (bei menschlichem Alter bis 50 Jahre kann davon ausgegangen werden, dass die Ausfallraten konstant sind - ab einem Aler von 80 bspw. wäre das nicht mehr möglich). Die angegebenen Anteile α_i werden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.
Sei T_1 die hypothetische Lebensdauer, wenn lediglich Malaria als Todesursache wirksam ist, λ_1 die zugehörige Ausfallrate. Nach den gegebenen Informationen und unter der getroffenen Voraussetzung, dass die zum Tode führenden Risiken unabhängig sind, ist

$$\frac{1}{4} = R(50) = P(T > 50) = \prod_{i=1}^{3} R_i(50) = exp(-50\sum_{i=1}^{3}\lambda_i) \tag{2}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} &= exp(-50\sum_{i=1}^{3}\lambda_i) \\
\Leftrightarrow \ln(\frac{1}{4}) &= -50\sum_{i-1}^{3}\lambda_i \\
\Leftrightarrow -\ln(4) &= -50\sum_{i-1}^{3}\lambda_i \\
\Leftrightarrow \ln(4) &= 50\sum_{i-1}^{3}\lambda_i \\
\Leftrightarrow \sum_{i-1}^{3}\lambda_i &= \frac{1}{50}\ln(4) \qquad (3)
\end{aligned}$$

Nach (1) stirbt der Anteil

$$\begin{aligned}
\int_0^{50} \lambda_1 \exp(-t\sum_{i=1}^{3}\lambda_i)dt &= \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i} exp(-t\sum_{i=1}^{3}\lambda_i) \mid_0^{50} \qquad (4) \\
&= -\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i} exp(-50\sum_{i=1}^{3}\lambda_i) + \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i} exp(0\cdot\sum_{i=1}^{3}\lambda_i) \\
&= -\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i} exp(-50\sum_{i=1}^{3}\lambda_i) + \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i} \\
&= \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i}(1 - \exp(-50\sum_{i=1}^{3}\lambda_i)) \qquad (5)
\end{aligned}$$

der Neugeborenen bis zum 50. Lebensjahr an Malaria. Damit ist

$$\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i}(1 - \exp(-50\sum_{i=1}^{3}\lambda_i)) = \frac{1}{5}$$

($\frac{1}{5} = 20\%$ der Neugeborenen die an Malaria sterben nach Voraussetzung)

Mit (2) und (3) kann man vorherige Gleichung umformen:

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^3 \lambda_i}(1 - \exp(-50\sum_{i=1}^{3}\lambda_i)) &= \frac{1}{5} \\
\Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^3 \lambda_i}(1 - \frac{1}{4}) &= \frac{1}{5} \\
\Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^3 \lambda_i} &= \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3} \\
\Leftrightarrow \lambda_1 &= \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\sum_{i=1}^{3}\lambda_i \\
\Leftrightarrow \lambda_1 &= \frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{50}\ln(4) \\
\Leftrightarrow \lambda_1 &= \frac{2}{375}\ln(4)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\lambda_2 + \lambda_3 &= \sum_{i=1}^{3}\lambda_i - \lambda_1 \\
&= \frac{1}{50}\ln(4) - \frac{2}{375}\ln(4) \\
&= (\frac{1}{50} - \frac{2}{375})\ln(4) \\
&= \frac{11}{750}\ln(4).
\end{aligned}$$

Wenn Malaria als Todesursache eliminiert werden kann (also wenn $\lambda_1 = 0$ wird), dann ist der Anteil der Neugeborenen, die unter den verbleibenden Risiken das 50. Lebensjahr erreichen:

$$R_2(50)\cdot R_3(50) = exp(-50(\lambda_2 + \lambda_3)) = 0,36.$$

Sei T_2 die hypothetische Lebensdauer, wenn nur Herzversagen als Todesursache ist und λ_2 die zugehörige Ausfallrate. Um den Anteil der Neugeborenen zu bestimmen, die nach Eliminierung von Malaria an Herzversagen sterben, ermitteln wir λ_2 ähnlich wie vorher λ_1:

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^3 \lambda_i}(1 - \exp(-50\sum_{i=1}^{3}\lambda_i)) &= \frac{15}{100} \\
\Leftrightarrow \frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^3 \lambda_i}(1 - \frac{1}{4}) &= \frac{15}{100}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i} &= \frac{15}{100}\cdot\frac{4}{3} \\
\Leftrightarrow \lambda_2 &= \frac{15}{100}\cdot\frac{4}{3}\cdot\sum_{i=1}^{3}\lambda_i \\
\Leftrightarrow \lambda_2 &= \frac{15}{100}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{50}\ln(4) \\
\Leftrightarrow \lambda_2 &= \frac{1}{250}\ln(4)
\end{aligned}$$

Damit erhält man mit (4) und (5) den Anteil der bis zum 50. Lebensjahr an Herzversagen sterbenden Neugeborenen:

$$\begin{aligned}
\int_0^{50} \lambda_2 exp(-t(\lambda_2+\lambda_3)dt &= \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_3}(1-exp(-50(\lambda_2+\lambda_3)) \\
&= \frac{\frac{1}{250}\ln(4)}{\frac{11}{750}\ln(4)}(1-exp(-50\cdot\frac{11}{750}\ln(4) \\
&= \frac{3}{11}(1-exp(-\frac{11}{15}\ln(4))) \\
&= 0,17
\end{aligned}$$