## 3.4 Satz

Ist $(p_n)$ eine Folge mit $0 \le p_n \le 1$ und $n \cdot p_n \longrightarrow \lambda$ $(n \to \infty)$, dann gilt:

$$b_{n,p_n}(k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \longrightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad (n \to \infty$$

Beweis: 1. Variante: Mit Hilfe der Abschätzung (benutze also 3.1):

$p_i = p_n \quad (i = 1, \dots, n)$

Dann ist $P(X=k) = b_{n,p_n}(k)$

$$n p_n^2 = \underbrace{\underbrace{n p_n}_{} \cdot p_n}_{\longrightarrow 0} \xrightarrow{n\to\infty} \lambda \cdot \frac{\lambda}{n}$$

□

2. Variante: Beweis ohne Fehlerabschätzung

Setze $\lambda_n = n p_n$ und benutze $p_n = \frac{\lambda_n}{n}$

$$b_{n,p_n}(k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k} \lambda_n^k \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}$$

$$= \frac{1}{k!} \underbrace{\frac{n}{n}}_{\to 1} \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\to 1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{\to 1} \underbrace{\lambda_n^k}_{\to \lambda^k} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{-k}}_{\to 1}$$

denn $\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^k} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

Vermutung $\xrightarrow{n\to\infty} e^{-\lambda}$

Untersuche Grenzwert von $\left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^n$

Betrachte: $\left| \underbrace{\left(1 + \frac{x_n}{n}\right)^n}_{=:a_n} - \underbrace{\left(e^{x_n/n}\right)^n}_{=:b_n} \right|$ $(x_n)$ sei eine Folge mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$

$$\le \sum_{k=0}^{n} \left| a_n^k b_n^{n-k} - a_n^{k+1} b_n^{n-k-1} \right|$$

$$\le \sum_{k=0}^{n} |a_n|^k \, |b_n - a_n| \, |b_n|^{n-k-1}$$

⌐ benutze nun: $\left|1 + \frac{x_n}{n}\right| \le e^{\frac{|x_n|}{n}}$ somit also $|a_n| \le e^{|x_n|/n}$

es gilt auch $|b_n| \le e^{|x_n|/n}$ ⌟

$$\le \sum_{k=0}^{n} \left(e^{\frac{|x_n|}{n}}\right)^k \left(e^{\frac{|x_n|}{n}}\right)^{n-k-1} |b_n - a_n|$$