(1) Motivation

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Ausschuss bei einer Produktion sei gleich 0,005. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 10.000 willkürlich herausgegriffenen Erzeugnissen die Anzahl der fehlerhaften Stücke gleich 40 ist?

$n = 10.000$
$p = 0{,}005$
$q = 0{,}995$

[Beispiel bekannt aus erstem Vortrag]

Binomialverteilung: $b_{10000;\,0{,}005}(40) = \binom{10.000}{40} \cdot 0{,}005^{40} \cdot 0{,}995^{9960} \approx 0{,}02143$

Approximation mittels lokalem ZGWS ergab: $\approx 0{,}0207$

Nun soll mit der Hilfe der Approximation der Binomialverteilung durch die Poissonverteilung eine bessere Abschätzung gefunden werden.

(2) Einstieg

Für kleine Erfolgswahrscheinlichkeiten ist eine weitere Art der Approximation der Binomialverteilung von Vorteil.

Dazu zunächst ein Hilfssatz:

2.1 Hilfssatz: Sind X und Y unabhängige Zufallsvariable mit ganzzahligen Werten so ist: $P(X+Y=k) = \sum_i P(X=i)\, P(Y=k-i)$

Sind $u=(u_i)$ und $v=(v_i)$ zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen aus $\mathbb{Z}$, so nennt man die Verteilung $w=(w_k)$ mit $w_k = \sum_i u_i\, v_{k-i}$ die Faltung $u * v$ von u und v.

Die Verteilung von $X+Y$ ist also die Faltung der Verteilung von X mit der von Y, wenn X und Y unabhängig sind.