① Definition

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen.

Dann heißt $\hat{F}_n : x \mapsto \hat{F}_n(x,\omega)$ mit $\hat{F}_n(x,\omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{]-\infty, x]}(X_n(\omega))$

die empirische Verteilungsfunktion an der Stelle x.

Eigenschaften:
- $0 \leq \hat{F}_n(x,\omega) \leq 1$
- $\hat{F}_n$ ist monoton wachsende Treppenfunktion

Bemerkung

Im folgenden Satz und Beweis werde ich für den Funktionswert $\hat{F}_n(x,\omega)$ nur noch $\hat{F}_n(x)$ schreiben.

② Hauptsatz der mathematischen Statistik (Glivenko-Cantelli-Theorem)

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F.

Ferner sei $\hat{F}_n : x \mapsto \hat{F}_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{]-\infty, x]}(X_i)$ die empirische Verteilungsfunktion von $X_1, \dots, X_n$ an der Stelle x.

Dann gilt:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \{ | \hat{F}_n(x) - F(x) | \} \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad f.s.$$