Der zentrale Grenzwertsatz

1. Wahrscheinlichkeitsmetrik

Für zwei Verteilungsfunktionen F und G wird die Metrik
$d(F,G) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x)-G(x)|$ definiert.
Sind X, Y die Zufallsvariablen mit den Verteilungsfunktionen F und G mit $F(x) = P(X \leq x)$ und $G(x) = P(Y \leq x)$, so schreiben wir statt $d(F,G)$

auch $d(X,Y)$ oder $d(X,G)$.

2. Lemma

Ist $E(Y^2) \leq \eta$, so gilt:

$$d(X+Y, \Phi) \leq d(X, \Phi) + 2 \cdot \eta^{1/3} \qquad (1)$$

Beweis:

Betrachte Φ. Die max. Steigung ist in $x=0$ und es ist $\Phi'(0) = \varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Denn
$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$
$$\Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = \varphi(x)$$

Hiervon soll das Maximum ermittelt werden. Bilde also $\Phi''(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}}$ und setze $\Phi''(x) = 0$:

$$\underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}_{\neq 0} x \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}}}_{\neq 0} = 0 \iff x = 0$$

$\Rightarrow$ mögliche Extremstelle von Φ' in 0.

Setze 0 in Φ'' ein.

$$\Phi'''(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)$$