

Probeklausur zur Analysis I für Lehramt Gymnasium

Aufgabe 1: Beweisen Sie die Ungleichung $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1$ für $x > 0$. (6 Punkte)

Aufgabe 2: Sind die Folgen $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$ und $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ konvergent? Bestimmen Sie ggf. die Grenzwerte. (4+4 Punkte)

Bonus: Erweitern Sie Ihre Resultate auf weitere Folgen der Form $(1 + c_n)^n$!
(4 Bonuspunkte)

Aufgabe 3: Für die Folge $a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$ bestimme man den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$.

Geben Sie desweiteren zu $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ an, für das gilt

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

(4+4 Punkte)

Aufgabe 4: Welche der folgenden Aussagen impliziert die Stetigkeit einer Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ im Punkt $a \in \mathbb{R}$? (Beweis oder Gegenbeispiel; 4+4+4 Punkte)

- a) Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(a - \frac{1}{n}\right) = f(a)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(a + \frac{1}{n}\right) = f(a)$.
- b) Man hat $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - f(a)|^2 = 0$.
- c) $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Aufgabe 5: Geben Sie für die Funktion

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 - x^3}{1 + x^3}}$$

den maximalen Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$ an und untersuchen Sie dort auf Stetigkeit sowie Differenzierbarkeit. Im Falle der Differenzierbarkeit bestimme man die Ableitung. (3+3+3+3 Punkte)

Wir wünschen Ihnen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins neue Jahr!