

## Nichtnegative Matrizen und Markoff Ketten

WiSe 2007/08

Blatt 13

**Aufgabe 48** Ein verschulter Studiengang dauert regulär  $n = 5$  Jahre. Nach dem  $i$ -ten Jahr verhält sich ein Student (geschlechtsneutral) folgendermaßen:  
mit Wahrscheinlichkeit  $p_i$  bricht er ab,  
mit Wahrscheinlichkeit  $q_i$  wiederholt er das  $i$ -te Jahr,  
mit Wahrscheinlichkeit  $r_i$  kommt er in das  $i + 1$ -te Jahr. (Im Fall  $i = n$  ist  $r_n$  die Wahrscheinlichkeit, daß er das Abschlußexamen besteht.) Es seien  $p_i, q_i, r_i > 0$ . Zeigen Sie, daß eine Markoffkette vorliegt mit Zustandsraum  $\{0, 1, \dots, n, n + 1\}$ . Darunter sind zwei absorbierende Zustände ( $0$ : erfolgloser bzw.  $n + 1$ : erfolgreicher Abgang). (Ist es hier gerechtfertigt, die Gültigkeit der Markoffeigenschaft anzunehmen? Was könnte dagegen sprechen?)

- Stellen Sie die Übergangsmatrix auf
- Geben Sie das Konvergenzverhalten an
- Bestimmen Sie die mittlere *Verweildauer* eines Studenten. D.h., die mittlere Dauer bis zum Ausscheiden.

**Aufgabe 49** *Survival of the survivor*: Ein einfaches Glasperlenspiel von M. Eigen und R. Winkler-Oswatitsch, das Evolution ohne Selektion und Mutation simuliert: Auf einem Schachbrett werden 64 Glaskugeln verteilt, die die vier Farben  $F_1, \dots, F_4$  haben. Die Verteilung erfolgt zufällig, jede Farbe soll mindestens durch eine Kugel vertreten sein.

**Spielregeln.** Seien  $X, Y$  auf  $\{1, \dots, 64\}$  gleichverteilte Zufallsvariable. Durch  $X$  wird ein Feld  $X = i$  gewählt, durch  $Y$  wird ein weiteres Feld  $Y = j$  gewählt, wobei  $W(Y = j | X = i) = \frac{1}{63}$ , falls  $i \neq j$ , und  $= 0$  sonst.

- Ist  $X = i$ , so wird die auf dem Platz  $i$  liegende Kugel entfernt,
- ist  $Y = j$  und hat die Kugel auf Platz  $j$  die Farbe  $F_k$ , so wird eine Kugel der Farbe  $F_k$  auf Platz  $i$  gelegt.

Nun sind wieder alle Felder besetzt, das Spiel beginnt von vorne. (Die Zufallsvektoren  $(X, Y)$ , die zu verschiedenen Spielzügen gehören, werden als unabhängig vorausgesetzt.)

Sei  $\vec{\xi}^{(n)} := (\xi_j^{(n)} : 1 \leq j \leq 4)$  der Vektor in  $\{1, \dots, 64\}^4$ , der die Anzahlen der Kugeln der Farben  $F_j, 1 \leq j \leq 4$ , angibt, die sich nach  $n$  Spielzügen auf dem Schachbrett befinden.

- $(\vec{\xi}^{(n)})$  bildet eine zeitlich homogene Markoff Kette.

- b) Man halte eine Farbe  $F_i$  fest. Zeigen Sie, daß  $(\xi_i^{(n)})_{n \geq 1}$  eine zeitlich homogene Markoff Kette bildet. Geben Sie den Zustandsraum, den Übergangsgraphen und die Übergangsmatrix an. (Betrachten Sie oBdA den Fall  $i = 1$ )
- c) Bestimmen Sie die ergodischen und die transienten Zustände. Welche Zustände sind absorbierend?
- d) Wie verhalten sich die Verteilungen von  $\xi_1^{(n)}$  für  $n \rightarrow \infty$  bei gegebener Startverteilung?
- e) Versuchen Sie den Namen *survival of the survivor* zu erklären.

**Aufgabe 50** In einem Bedienungssystem mit Poissonschem Ankunftsprozeß  $A(t), t \geq 0$ , Poissonschem Abfertigungsprozeß  $D(t), t \geq 0$ , mit jeweiligen Intensitäten  $\lambda, \mu > 0$  seien  $c$  Bedienungsstellen vorhanden, die Wartekapazität sei 0. (Z.B. Telefonzentrale ohne Warteschleife). Die Zahl der Kunden im System  $N_S(t), t \geq 0$  bildet eine Markoffkette mit Zustandsraum  $\{0, \dots, c\}$ .

Zeigen Sie, daß die Intensitätsmatrix die Gestalt

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \dots & & 0 \\ \mu & -(\mu + \lambda) & \lambda & \dots & & 0 \\ \dots & & & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & (c-1)\mu & -((c-1)\mu + \lambda) & \lambda & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c\mu & -(c\mu + \lambda) & \lambda \end{pmatrix} \text{ besitzt.}$$

Zeigen Sie, daß die invarianten Verteilungen die Form

$${}^t\vec{\pi} = (\pi_k = x \cdot \rho^k / k!, \quad k = 0, \dots, c) \text{ besitzen. Dabei ist } \rho = \lambda/\mu \text{ und } x > 0.$$

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß ein Kunde abgewiesen wird.