

Nichtnegative Matrizen und Markoff Ketten

WiSe 2007/08

Blatt 1

Aufgabe 1 Im folgenden sei stets \mathbb{V} ein endlich dimensionaler Vektorraum über \mathbb{C} , sei $A \in \text{Lin}(\mathbb{V})$ mit Dimension d . Weiter sei $f_A : \lambda \mapsto \det(A - \lambda I)$ das charakteristische Polynom. Zeigen Sie:

- Für alle $U \in \text{GL}(\mathbb{V})$ gilt: $f_A = f_{UAU^{-1}}$
- Folgern sie daraus: $\text{Spec}(A) = \text{Spec}(UAU^{-1})$
- Zeigen Sie analog: $f_{tA} = f_A$ sowie $\text{Spec}(tA) = \text{Spec}(A)$ und
- $\text{Spec}(A^*) = \text{Spec}(A)$

Aufgabe 2 Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$. Dann definiert man einen linearen Operator

$$T_{\vec{a} \otimes \vec{b}} : \vec{z} \mapsto \langle \vec{z}, \vec{a} \rangle \cdot \vec{b} \quad (\text{Kurzform : } T_{\vec{a} \otimes \vec{b}} =: \vec{a} \otimes \vec{b})$$

- Zeigen Sie: $\vec{a} \otimes \vec{b}$ hat ein eindimensionales Bild, und umgekehrt, jeder Operator in $\text{Lin}(\mathbb{V})$ mit eindimensionalem Bild ist von der Gestalt $\vec{a} \otimes \vec{b}$.
- Geben Sie (bezüglich der kanonischen Basen) die Darstellungsmatrix von $\vec{a} \otimes \vec{b}$ an. D.h., geben Sie eine Matrix A an mit $L_A = \vec{a} \otimes \vec{b}$
- Analog: Geben Sie eine Matrix B an mit $R_B = \vec{a} \otimes \vec{b}$.
- Unter welchen Voraussetzungen ist $\vec{a} \otimes \vec{b}$ idempotent?

Aufgabe 3 Es seien $A \in \text{M}(\mathbb{C}, d)$, $\lambda \in \text{Spec}(A)$. Zeigen Sie:

- $E_A(\lambda)$ und $VE_A(\lambda)$ sind A -invariante Teilräume. Für $\lambda \neq \mu$ gelten $E_A(\lambda) \cap E_A(\mu) = \{0\}$ sowie $VE_A(\lambda) \cap VE_A(\mu) = \{0\}$
- Für *reelle* $A \in \text{M}(\mathbb{R}, d)$ gilt: Es gibt eine Darstellung als Summe *reeller* Matrizen $A = D + N$ mit $DN = ND$, wobei N nilpotent ist und D die Gestalt $D = U\Delta U^{-1}$ besitzt. Dabei ist U eine reelle Basistransformation $U \in \text{GL}(\mathbb{R}, d)$ und Δ ist eine direkte Summe einer (reellen) Diagonalmatrix und zweidimensionaler Drehungsmatrizen.

[[$\lambda \in \text{Spec}(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \text{Spec}(A)$. Komplexe Version der Jordan Form benutzen!]]

- Folgern Sie aus der additiven Jordan Zerlegung die multiplikative Version: $A \in \text{GL}(\mathbb{C}, d) \Rightarrow A = DU = UD$ wobei D diagonalisierbar ist und U unipotent.

[[In der additiven Jordanzerlegung ist der diagonalisierbare Anteil invertierbar]]

- Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ läßt sich in die Summe der Diagonalmatrix

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und der nilpotenten Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ zerlegen. Ist dies die Jordanzerlegung?

Aufgabe 4 a) Geben Sie für die folgenden Matrizen A jeweils das Spektrum $\text{Spec}(A)$, und für $z \in \text{Spec}(A)$ die Links-Eigenräume $E_A(z)$ sowie die und Rechts-Eigenräume und die verallgemeinerten Eigenräume $VE_A(z)$ an:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Voraussetzungen und Literaturhinweise

Stochastik:

Inhalt einer üblichen Vorlesung Stochastik I. Vgl. z.B. **Krengel**: Einführung in die W-theorie...

Lineare Algebra:

z.B. **Huppert, B.**: Angewandte Lineare Algebra

Pullman N.J.: Matrix Theory and Applications

Grundlagen nicht negativer Matrizen:

Vor allem: **H. Schäfer**: Banach Lattices and Positive Operators : Kapitel I (der endlich dimensionale Fall)

Huppert s.o.

Fritz, Huppert, Willems, Stochastische Matrizen

Seneta, E.: Non-negative Matrices

Weitere Hinweise folgen