

Musterlösung zur Probeklausur
Analysis I für Lehramt Gymnasium, WS 2006/07

Aufgabe 1: (6 Punkte, unser Weihnachtsgeschenk an Sie)

1. Möglichkeit: Mit der bekannten Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel gilt

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = \sqrt{1} = 1 \quad \text{für } x > 0.$$

2. Möglichkeit: Umformen der Ungleichung: Für $x > 0$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1 &\iff x^2 + 1 \geq 2x \\ &\iff x^2 - 2x + 1 \geq 0 \iff (x - 1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Letzteres ist offensichtlich erfüllt.

Aufgabe 2: Es gilt $1 - \frac{1}{n^2} < 1$ und somit $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ (1 Punkt). Wegen $-\frac{1}{n^2} \geq -2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit der Bernoullischen Ungleichung

$$1 \geq \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 + n \cdot \left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1 \quad (2 \text{ Punkte}).$$

Also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1$ (1 Punkt).

Obiges lässt sich verallgemeinern auf Folgen (c_n) mit $-2 \leq c_n \leq 0$ und $n \cdot c_n \rightarrow 0$. In diesem Fall gilt ganz analog $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + c_n\right)^n = 1$ (2 Bonuspunkte).

Ebenso gilt $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq -2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und mit der Bernoullischen Ungleichung folgt

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \sqrt{n} \rightarrow +\infty \quad (2 \text{ Punkte}).$$

Also gilt $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n \rightarrow +\infty$ für $n \rightarrow \infty$, die Folge besitzt somit keinen Grenzwert in \mathbb{R} . (2 Punkte).

Obiges lässt sich verallgemeinern auf Folgen (c_n) mit $c_n > 0$ und $n \cdot c_n \rightarrow \infty$. In diesem Fall gilt ganz analog $\left(1 + c_n\right)^n \rightarrow +\infty$ für $n \rightarrow \infty$ (2 Bonuspunkte).

Aufgabe 3: Es gilt (2 Punkte)

$$a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{n + \sqrt{n} - n}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} + 1}.$$

Wegen $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ folgt mit den Rechenregeln für konvergente Folgen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2} \quad (2 \text{ Punkte}).$$

Sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, dann gilt (1,5 Punkte)

$$\begin{aligned} |a_n - \tfrac{1}{2}| &= \left| \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + 1}} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2 - \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + 1}\right)}{2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + 1}\right)} \right| \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \left| 1 - \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} \right| = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Weiterhin gilt (1,5 Punkte)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \right) < \varepsilon &\iff \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} < 2\varepsilon + 1 \iff \frac{1}{\sqrt{n}} < (2\varepsilon + 1)^2 - 1 \\ &\iff \sqrt{n} > \frac{1}{(2\varepsilon + 1)^2 - 1} \iff n > \frac{1}{((2\varepsilon + 1)^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

Wähle also $n_0 = \left\lceil \frac{1}{((2\varepsilon + 1)^2 - 1)^2} \right\rceil + 1$, dann gilt $|a_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ (1 Punkt).

Aufgabe 4:

- a) Die Aussage impliziert nicht die Stetigkeit von f in a (1 Punkt).

Gegenbeispiel: Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \left\{ a, a + \frac{1}{n}, a - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Offensichtlich gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a - \frac{1}{n}) = 0 = f(a) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a + \frac{1}{n})$. Aber f ist nicht stetig in a , da z.B. für $x_n = a + \frac{\sqrt{2}}{n}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1 \neq f(a)$ (3 Punkte).

- b) Sei (x_n) eine beliebige Folge mit $x_n \rightarrow a$. Dann gilt für $y_n = f(x_n) - f(a)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(a)|^2 = 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - f(a)| = 0$$

woraus die Stetigkeit von f in a folgt (4 Punkte).

- c) Die Aussage impliziert nicht die Stetigkeit von f in a (1 Punkt).

Gegenbeispiel: Sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \neq a, \\ 1 & \text{für } x = a. \end{cases}$$

Offensichtlich ist f nicht stetig in a aber z.B. für $\varepsilon = 2$ gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$, insbesondere also für solche $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$ für ein beliebiges $\delta > 0$ (3 Punkte).

Aufgabe 5: Für die Wohldefiniertheit von f muss gelten

$$x^3 \neq -1 \quad \text{und} \quad \frac{1 - x^3}{1 + x^3} \geq 0.$$

Ersteres ist für $x \neq -1$ erfüllt und für letzteres gilt in diesem Fall

$$\begin{aligned} \frac{1-x^3}{1+x^3} \geq 0 &\iff (1-x^3)(1+x^3) = 1-x^6 \geq 0 \iff x^6 \leq 1 \\ &\iff |x| \leq 1 \iff -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man den Definitionsbereich $D = (-1, 1]$ (3 Punkte).

f ist stetig auf D , denn für jede Folge (x_n) aus D mit $x_n \rightarrow x \in D$ gilt $f(x_n) \rightarrow f(x)$ nach den Rechenregeln für konvergente Folgen (1 Punkt).

Nach den Rechenregeln für differenzierbare Funktionen ist f auf $(-1, 1)$ differenzierbar (1 Punkt).

Für die Differenzierbarkeit in $x_0 = 1$ betrachte man für $x \in D \setminus \{1\}$

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{\frac{1-x^3}{1+x^3}}}{x - 1} = -\sqrt{\frac{1-x^3}{(1+x^3)(1-x)^2}}.$$

Mit einer einfachen Polynomdivision zeigt man $(x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1$, so dass folgt

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{(1+x^3)(1-x)}} \quad (2 \text{ Punkte}).$$

Für eine beliebige Folge $x_n \in D \setminus \{1\}$ mit $x_n \rightarrow 1$ gilt also $x_n^2 + x_n + 1 \rightarrow 3$, $1 + x_n^3 \rightarrow 2$, sowie $0 < 1 - x_n \rightarrow 0$, so dass folgt

$$\frac{f(x_n) - f(1)}{x_n - 1} = -\sqrt{\frac{x_n^2 + x_n + 1}{(1+x_n^3)(1-x_n)}} \rightarrow -\infty.$$

Also ist f nicht differenzierbar in $x_0 = 1$ (2 Punkte).

Für die Ableitung von f in $x \in (-1, 1)$ berechnet man (3 Punkte)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x^3}{1+x^3}}} \cdot \frac{-3x^2(1+x^3) - (1-x^3)3x^2}{(1+x^3)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x^3}{1-x^3}} \cdot \frac{-3x^2 - 3x^5 - 3x^2 + 3x^5}{(1+x^3)^2} \\ &= -3\sqrt{\frac{1+x^3}{1-x^3}} \cdot \left(\frac{x}{1+x^3}\right)^2. \end{aligned}$$