

Aufgabe 1:

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Es seien $A_n \in \mathcal{A}$ Ereignisse und $X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariable für $n \in \mathbb{N}$.

Definieren Sie folgende Begriffe:

- a) A_1, A_2, A_3 sind unabhängig;
- b) X_1, X_2, X_3 sind unabhängig;
- c) X_1, X_2, X_3 sind unkorreliert;
Bestimmen Sie in diesem Fall $\text{Var}(X_1 + X_2 + X_3)$ aus den Varianzen von X_1, X_2 und X_3 , und weisen Sie die benutzte Formel nach.
- d) Die Verteilung P_{X_1} von X_1 ;
- e) Die Verteilungsfunktion F_{X_1} von X_1 ;
- f) Die Dichte f_{X_1} bei einer kontinuierlichen Zufallsvariable X_1 .

Aufgabe 2:

Herr Falke hat seine Brille verlegt. Mit der Wahrscheinlichkeit 0.7 befindet sie sich in seiner Wohnung und mit der Wahrscheinlichkeit 0.3 befindet sie sich im Auto. Ist sie in der Wohnung, dann gibt es zwei gleichwahrscheinliche Möglichkeiten: Sie liegt auf dem Schreibtisch oder im Badezimmer. Herr Falke sucht nur in der Wohnung und nicht im Auto. Da er ohne Brille schlecht sieht, findet er sie mit Wahrscheinlichkeit 0.8, wenn sie auf dem Schreibtisch liegt, bzw. mit Wahrscheinlichkeit 0.6, wenn sie sich im Badezimmer befindet.

Berechnen Sie

- a) die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Brille im Badezimmer befindet,
- b) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Herr Falke die Brille findet,
- c) die bedingten Wahrscheinlichkeiten dafür, dass sich die Brille auf dem Schreibtisch befindet bzw. im Badezimmer befindet bzw. im Auto befindet, wenn Herr Falke vergeblich gesucht hat.

Aufgabe 3:

In einer Serie von Spielen mit zwei Spielern hat am Anfang Spieler 1 ein Guthaben von 1 Euro und Spieler 2 ein Guthaben von 2 Euro. In jeder Runde gewinnt einer der beiden Spieler mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ (der dann 1 Euro von Gegner erhält), oder das Spiel endet unentschieden mit Wahrscheinlichkeit $1/3$. Es wird solange gespielt, bis mindestens ein Spieler ruiniert ist.

Die Kapitalentwicklung von Spieler 1 wird dann als zeithomogener Markovprozess $(X_n)_{n \geq 0}$ auf dem Zustandsraum $E = \{0, 1, 2, 3\}$ modelliert.

- a) Schreiben Sie die Übergangsmatrix der Markovkette als stochastische Matrix $S \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ und zeichnen Sie den assoziierten Übergangsgraphen.
- b) Bestimmen Sie die Verteilung P_{X_n} von X_n für $n = 0, 1, 2$.
- c) Berechnen Sie alle stationären Verteilungen von S (als Zeilenvektoren).
- d) Bestimmen Sie für $i = 1, 2$ die Wahrscheinlichkeiten α_i , dass bei Start mit Kapital i Spieler 1 am Ende ruiniert wird.

Aufgabe 4:

Bei einer Fluggesellschaft weiß man, dass im Mittel 10% derjenigen Personen, die sich einen Platz für einen Flug auf einer bestimmten Route reservieren lassen, zum Abflug nicht erscheinen. Um die Zahl der ungenutzten Plätze nicht zu groß werden zu lassen, werden daher für einen 96 sitzigen Jet 100 Platzreservierungen vergeben.

- a) Berechnen Sie mittels des zentralen Grenzwertsatzes einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit, dass alle zum Abflug erscheinenden Personen, auch einen Platz erhalten. Nehmen Sie dabei an, dass die Entscheidungen darüber, ob die einzelnen Reservierungen wahrgenommen werden, unabhängig zustande kommen.
- b) Wie viele Platzreservierungen dürfen höchstens vorgenommen werden, damit die entsprechende Wahrscheinlichkeit mindestens 95% beträgt? Geben Sie die Antwort mit Hilfe einer geeigneten Näherungsrechnung.

Aufgabe 5:

Es sei $(X_n)_{n \geq 1}$ eine Folge unabhängiger, auf dem Intervall $[0, 2]$ kontinuierlich gleichverteilter Zufallsvariablen.

Betrachten Sie die Maxima $Z_n := \max(X_1, \dots, X_n)$ für $n \in \mathbb{N}$.

- a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F der X_n .
- b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion G_n und Dichten g_n der Z_n für $n \in \mathbb{N}$.
- c) Bestimmen Sie $E(Z_n)$ und $Var(Z_n)$.
- d) Schreiben Sie die Definition der stochastischen Konvergenz von $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine Zufallsvariable Z nieder, und begründen Sie, dass $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tatsächlich stochastisch konvergiert. Bestimmen Sie dabei insbesondere den Limes Z .
- e) Begründen Sie, dass $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch in Verteilung konvergiert, und bestimmen Sie die Grenzverteilung.

f) Für $r \in]0, 2[$ zeige man

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_n \leq r) < \infty.$$

g) Formulieren Sie beide Teile des Lemmas von Borel-Cantelli für Folgen $(A_n)_{n \geq 1}$ von Ereignissen, und geben Sie insbesondere die Definition von $A := \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ formal an. Beschreiben Sie A in Worten.

h) Zeigen Sie, dass $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fast sicher konvergiert.

Aufgabe 6:

Sei $f_{\mu}(x) = c_{\mu} \cdot \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{2}(\ln x - \mu)^2} \cdot 1_{]0, \infty[}(x)$.

- Bestimmen Sie c_{μ} so, dass f_{μ} die Dichte der Verteilung einer Zufallsvariablen X_{μ} ist.
- Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter μ .
- Ist der Maximum-Likelihood-Schätzer erwartungstreu? Bestimmen Sie auch seine Varianz!