Prof. Dr. M. Voit SS 2009

Stochastik I

Blatt 14

Abgabetermin: Bis Donnerstag, 16. Juli 2009 im Briefkasten
Ihrer Übungsgruppe.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie den ML-Schätzer für den Parameter:

a) $p \in [0,1]$ bei geometrisch verteilten Zufallsvariablen mit Zähldichte $f_p(k) = p(1-p)^{k-1} \quad (k \in \mathbb{N})$.

b) $p \in [0,1]$ bei negativ Binomialverteilten Zufallsvariablen mit Verteilung $NB_{r,p}$ auf $\mathbb{N}_0$ bei festem $r \in \mathbb{N}$.

c) $\alpha > 0$ bei Gamma-verteilten Zufallsvariablen mit Verteilung $\Gamma_{\alpha,\nu}$ bei festem $\nu > 0$.

d) $\mu \in \mathbb{R}$ bei Zufallsvariablen auf $\mathbb{R}$ mit der Dichte

$$f_\mu(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-|x-\mu|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

e) $M > 0$ für gleichverteilte Zufallsvariable auf den Intervallen $[0, M]$.

f) $M \in \mathbb{N}$ für Zufallsvariable, die auf den Mengen $\{1,2,3,\ldots,M\} \subset \mathbb{N}$ gleichverteilt sind.

Entscheiden Sie jeweils, ob die obigen Schätzer erwartungstreu sind.

Aufgabe 2

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, identisch normalverteilte Zufallsvariable mit unbekanntem Mittelwert m und Varianz 4, d.h. $P_{X_1} = P_{X_2} = \ldots = P_{X_n} = N(m,4)$. Zur Schätzung von m wird der Standarmittelwertschätzer $\overline{X_n} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ verwendet. Bestimmen Sie:

a) Für $n = 1000$ den Wert $\varepsilon > 0$, so dass

$$P(|\overline{X_{1000}} - m| \geq \varepsilon) = 0,05.$$

b) Für $\varepsilon = 0,01$ das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit

$$P(|X_n - m| \geq 0,01) \leq 0,05.$$

Verwenden Sie dabei die Normalverteilungstabelle auf einem früheren Blatt!

Aufgabe 3

Eine verbogene Münze mit den Seiten 0 und 1 mit unbekannter Wahrscheinlichkeit $p \in]0,1[$ für 1 wird n-mal unabhängig geworfen mit den Ergebnissen $X_1, \ldots, X_n$. Das empirische Mittel $\overline{X_n} := \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ wird als Schätzung für p verwendet. Bestimmen Sie anhand des zentralen Grenzwertsatzes einen ungefähren minimalen Wert n, so dass die Qualitätsanforderung

$$P(|\overline{X_n} - p| \geq 0,001) \leq 0,1$$

erfüllt ist.

Aufgabe 4 **(Schätzen des Umfangs einer Population)**

Um die Anzahl der Fische in einem Teich zu schätzen, werden r Fische gefangen, in geeigneter Weise markiert und danach wieder ausgesetzt. Einen Tag später werden n Fische gefangen, von denen k markiert sind.

a) Man zeige, dass die Anzahl k der am zweiten Tag gefangenen markierten Fische $H_{n,r,\theta-r}$ hypergeometrisch verteilt ist, wobei θ die (unbekannte) Gesamtzahl aller Fische im Teich bezeichnet.

b) Bestimmen sie den ML-Schätzer für θ. Ist dieser Schätzer erwartungstreu?

c) Welche Schätzung ergibt sich in b) für $r = 100, n = 150$ und $k = 11$?

Aufgabe 5

Es seien X_1, X_2, X_3 unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable; die Verteilung von X_1, X_2, X_3 sei die Gleichverteilung auf einem Intervall $[a,b]$ mit unbekannten Parametern $a < b$. Dann gilt

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = \frac{a+b}{2} =: m.$$

a) Bestimmen Sie für den Standardmittelwertschätzer

$$\overline{X_3} := \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3) \quad \text{die Varianz} \quad Var(\overline{X_3}).$$

b*) Bestimmen Sie den Erwartungswert und Varianz von

$$\overline{A_3} := min(X_1, X_2, X_3)$$

$$\overline{B_3} := max(X_1, X_2, X_3)$$

sowie von

$$\overline{M} := \frac{1}{2}(\overline{A_3} + \overline{B_3}).$$

c*) Überprüfen Sie insbesondere, dass $\overline{M}$ ein erwartungstreuer Schätzer für m ist mit $Var(\overline{M}) < Var(\overline{X_3})$,
d.h.: In der Situation von Gleichverteilungen auf einem Intervall ist $\overline{M}$ besser als der Standardmittelwertschätzer.

Wir wünschen Ihnen schöne und erholsame Semesterferien!