Prof. Dr. M. Voit SS 2009

Stochastik I

Blatt 13

Abgabetermin: Bis Donnerstag, 09. Juli 2009 im Briefkasten Ihrer Übungsgruppe.

Aufgabe 1 Ruinwahrscheinlichkeiten

Zwei Spieler starten ein Spiel mit Anfangskapital $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$. In jedem Zug gewinnt Spieler 1 von Spieler 2 eine Einheit mit Wahrscheinlichkeit $p \in]1/2, 1[$, sonst verliert er eine Einheit. Das Spiel endet, sobald ein Spieler ruiniert ist.

a) Skizzieren Sie den Übergangsgraphen der Markov-Kette, die den Kapitalstand von Spieler 1 beschreibt.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 1 schließlich ruiniert wird.
Anleitung: Lösungen $(a_i)_{i=0,\ldots,N_1+N_2}$ der Rekursion

$$a_i = pa_{i+1} + (1-p)a_{i-1} \quad (i = 1, \ldots, N_1 + N_2 - 1)$$

haben die Form $a_i = cx^i + dy^i \quad (i = 0, \ldots, N_1 + N_2)$ mit $c, d \in \mathbb{R}$ und x, y als eindeutige Lösungen der quadratischen Gleichung

$$z = pz^2 + (1-p).$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie für die zeithomogenen Markov-Ketten zu folgenden Übergangsmatrizen **alle** invarianten Verteilungen sowie das Langzeitverhalten $\lim_{n\to\infty} S^n$, und skizzieren Sie die zugehörigen Übergangsgraphen.

a)

$$S = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c)

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d)

$$S = \begin{pmatrix} q_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 \\ q_2 & 0 & p_2 & 0 & 0 \\ q_3 & 0 & 0 & p_3 & 0 \\ q_4 & 0 & 0 & 0 & p_4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit} \quad p_i, q_i > 0,\ p_i + q_i = 1.$$

Aufgabe 3

Sei $S \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine stochastische Matrix.
Zeigen Sie:

a) Existiert $Q := \lim\limits_{k \to \infty} S^k$, so ist Q stochastisch mit $QS = SQ = Q$, und alle Zeilenvektoren von Q sind stationäre Verteilungen von S.

b) Existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass S^k mindestens eine positive Spalte besitzt, so ist 1 der einziger Eigenwert von S vom Betrag 1, und dieser Eigenwert ist einfach.
(**Hinweis:** Verwenden Sie die Jordansche Normalform von S und passende Aussagen aus der Vorlesung!)

Aufgabe 4 Das Cox-Ross-Rubinstein-Modell:

In einem Aktienpreismodell mit $n \in \mathbb{N}$ Zeitschritten sei der Aktienkurs X zur Zeit 0 gleich 1. Für feste Konstanten $0 < d < 1 < u$ und $p \in]0,1[$ erhöht sich in jedem Zeitschritt der Kurs um den multiplikativen Faktor u mit Wahrscheinlichkeit p und verringert sich um den multiplikativen Faktor d mit Wahrscheinlichkeit $1-p$, d.h. nach einem Schritt hat der Kurs die Verteilung $p\delta_u + (1-p)\delta_d$. Bestimmen Sie die Verteilung des Aktienkurses nach n Schritten.

Aufgabe 5* Das Mendelsche Gesetz

Die möglichen Farben (grün und gelb) von Erbsen werden durch ein Gen der Gentypen AA, Aa und aa gesteuert. Da die Farbe grün dominant ist, sind nur die Erbsen mit dem Gentyp aa gelb (und alle anderen grün).
Ein Züchter beginnt mit einer gleich großen Anzahl von grünen und gelben Erbsen (mit einer unbekannten Verteilung der Gentypen bei den grünen Erbsen) und kreuzt diese. Mittels **Selbstbestäubung** werden nun aus jeder hybriden Erbsengeneration Nachkommen erzeugt mit den Vererbungswahrscheinlichkeiten der Gentypen wie in der Aufgabe 6* vom Aufgabenblatt 5.

a) Verifizieren Sie, dass die Vererbung obiger Gentypen bei Selbstbestäubung durch folgende Übergangswahrscheinlichkeiten beschrieben wird:

b) Leiten Sie eine explizite Formel für den Anteil A_n der grünen Erbsen in der n-ten Hybridgeneration in Abhängigkeit von der Ausgangsverteilung von aa, Aa und AA her und bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} A_n$.

Aufgabe 6*   Symbolfolgen

Zwei Spieler werfen unabhängig eine faire Münze mit den Seiten K = Kopf und Z = Zahl, bis zum ersten mal die Reihung (K, K, K) oder die Reihung (K, Z, K) auftritt. Im ersten Fall gewinnt der erste Spieler, im zweiten der andere. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der erste Spieler gewinnt.

Tipp: Betrachte eine Markov-Kette mit folgenden Übergangswahrscheinlichkeiten.

Hinweis zu den Klausuren bzw. mündlichen Vordiplomsprüfungen

Wiederholen Sie insbesondere folgende Themen:

- Begriffe wie Wahrscheinlichkeitsraum, Unabhängigkeit, bedingte Wahrscheinlichkeiten
- Lösen von kombinatorischen Problemen
- Arbeiten mit diesen Begriffen im Diskreten: Siebformel, Bayes, Formel v.d. totalen Wahrscheinlichkeit
- Wichige diskrete Verteilungen: Binomial, geometrisch, Poisson, hypergeometrisch
- Polyasches Urnenmodell
- Arbeiten mit Zufallsvariablen und ihren Verteilungen
- Verteilungsfunktion, Zähldichte und Dichtefunktion
- Änderung der Verteilungen bei Transformation von Zufallsvariablen
- Verteilungen von $X_1 + \ldots + X_n, \max(X_1, \ldots, X_n)$ usw. bei unabhängigen Zufallsvariablen, Faltung
- Geometrische Wahrscheinlichkeiten
- Erwartungswerte und Varianz: Methoden der Berechnung, Rechenregeln, T-Ungleichung
- Konvergenzarten bei Zufallsvariablen
- Lemma von Borel-Cantelli
- Arbeiten mit dem zentralen Grenzwertsatz
- Markov-Ketten: Berechnung von Auftreffwahrscheinlichkeiten und stationären Verteilungen, Langzeitverhalten
- Statistik: ML-Schätzer, Erwartungstreue, Vertrauensintervalle bei normalverteilten Zufallsvariablen