Stochastik I

Blatt 7

Abgabetermin: Bis Donnerstag, 28. Mai 2009 im Briefkasten Ihrer Übungsgruppe.

Aufgabe 1 Normalverteilungen

a) Es seien X eine $\mathbb{R}$-wertige, $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass $aX + b$ ebenfalls normalverteilt ist, und bestimmen Sie die passenden Parameter.

b) Es sei X eine $N(1, 2)$-verteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie anhand der rückseitigen Tabelle $P(X \in [0, 2])$.
(Achtung: Rückseitige Tabelle bezieht sich auf $N(0, 1)$!)

c) Für eine $N(0, 1)$-verteilte Zufallsvariable X bestimme man die Dichte der $[0, \infty[$-wertigen Zufallsvariablen X^2 und e^X.

Aufgabe 2 Die Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilungen

a) Es sei P eine Exponentialverteilung auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Zeigen Sie:
$\circledast \quad \forall x, t > 0 : \quad P(]x + t, \infty[\mid]t, \infty[) = P(]x, \infty[)$.

b) Es sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit einer stetigen Verteilungsfunktion F mit $F(0) = 0$, so dass $\circledast$ gilt.
Zeigen Sie, dass P eine Exponentialverteilung ist.
(**Tipp:** Für $x \in \mathbb{Q}, x > 0$ gilt $1 - F(x) = (1 - F(1))^x$).

Aufgabe 3

Zeigen Sie:

a) Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ ist Borel-messbar.

b) Jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist Borel-messbar.

(**Tipp:** Lemma 3.6 aus der Vorlesung!)

Aufgabe 4

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, $\mathbb{R}$-wertige Zufallsvariable mit den Verteilungsfunktionen $F_1, \dots, F_n$.

a) Begründen Sie kurz, warum

$$m_n := \min(X_1, \dots, X_n) \quad \text{und} \quad M_n := \max(X_1, \dots, X_n)$$

Zufallsvariable sind.

b) Drücken Sie die Verteilungsfunktionen von m_n und M_n mithilfe der Verteilungsfunktionen $F_1, \dots, F_n$ aus.

c) Zeigen Sie für unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariable $X_1, \dots, X_n$, dass m_n und M_n Dichten haben. Bestimmen Sie diese Dichten.

Aufgabe 5

Zwei Studenten gehen zwischen 13.00 und 14.00 Uhr zu einem zufälligen gleichverteilten Zeitpunkt unabhängig voneinander in die Mensa. Sie beschließen, jeweils genau 10 Minuten am Mensaeingang aufeinander zu warten.
Bestimmen Sie mit geometrischen Mitteln die Wahrscheinlichkeit für ein Zusammentreffen am Mensaeingang.

Aufgabe 6*

Sei X eine reelle Zufallsvariable mit Exponentialverteilung e_λ. Seien $N := [X]$ und $Z := X - [X]$ (dabei bezeichnet $[x]$ die größte ganze Zahl n mit $n \leq x$).
Zeigen Sie:

a) N besitzt eine geometrische Verteilung mit Parameter $q = e^{-\lambda}$.

b) Für $k \in \mathbb{N}_0,\ 0 \leq x < 1$ gilt

$$P(N = k, Z \geq x) = p \cdot q^k \cdot c(x).$$

$(q, p := 1 - q$ aus a), $c(x)$ unabhängig von k).

c) $c(x) = P(Z \geq x) = P(X \geq x | X \leq 1)$ für $0 \leq x < 1$.

d) N und Z sind unabhängig.
(**Tipp:** Benutzen Sie die vorstehenden Aussagen!).