Prof. Dr. J. Woerner

Übungen zur Stochastik II ,WS 08/09
Blatt 12

Aufgabe 1:
Seien $X_1, X_2, \cdots$ unabhängige Zufallsvariable, wobei X_n den Wert 1 und -1 mit Wahrscheinlichkeit $(2n)^{-1}$ annimmt und 0 mit Wahrscheinlichkeit $1 - n^{-1}$. Weiterhin sei $Y_1 = X_1$ und für $n \geq 2 : Y_n = X_n$ falls $Y_{n-1} = 0$ bzw. $Y_n = nY_{n-1}|X_n|$ falls $Y_{n-1} \neq 0$.
a) Zeigen Sie, dass $(Y_n)_n$ ein Martingal bzgl. $\sigma(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ ist.
b) Zeigen Sie, dass (Y_n) nicht f.s. konvergiert. Konvergiert es ein einer anderen Konvergenzart? Warum läßt sich der Martingalkonvergenzsatz nicht anwenden?

Aufgabe 2:
Seien $X_1, X_2, \cdots$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariable. Ferner sei $M(t) = E(\exp(tX_1))$ und erfülle $M(t) = 1$ für ein $t > 0$. Zeigen Sie, dass $P(S_k \geq x \text{ für ein } k) \leq e^{-tx}$ für $x > 0$ und das entsprechende t, wobei $S_k = X_1 + X_2 + \cdots X_k$ ist.
(Hinweis: Maximalungleichung)

Aufgabe 3:
Sei (B_t) eine Brownsche Bewegung und (X_t) ein Brownsche Brücke definiert durch $X_t = B_t - tB_1$. Bestimmen Sie die Kovarianzfunktion $Cov(X_s, X_t)$.

Aufgabe 4:
Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden Definitionen der Brownschen Bewegung:
i) Ein stochastischer Prozeß $(B_t)_{t\geq}$ mit $B_0 = 0$ heißt Brownsche Bewegung, wenn $B_t \sim N(0, t)$, die Zuwächse unabhängig und stationär sind, sowie die Pfade stetig.
ii) B ist ein stetiger, zentrierter Gaußscher Prozeß mit $Cov(X_s, X_t) = \min(s, t)$ für alle $s, t \geq 0$.

Abgabe der Übungsblätter bis Do 29.1.2009, 14 Uhr in den Übungskasten Nr. 22.