Aufgabe 1:

$$\begin{pmatrix} p & (1-p) \\ (1-q) & q \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Benutze $\exp(P) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^k}{k!}$

Blatt 7,

Aufgabe 4: (1)

$\mu \in \mathcal{M}^1(\mathbb{R})$, $\mu \neq \delta_x$

$(X_t)_{t\in[0,1]}$ sei $\mathbb{R}$-wertiger stoch. Prozeß mit endl. dim. Vert.

$$P_{(X_{t_1},\dots,X_{t_n})} = \underbrace{\mu \otimes \dots \otimes \mu}_{n\text{-mal}} \quad , n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le t_1 < \dots < t_n \le 1$$

Jede Modifikation $(\tilde{X}_t)$ hat dieselben endl. dim. Vert

Wir zeigen: Ein Prozeß mit den endl. dim Vert. oben kann keine f.s. rechtsstetigen Pfade besitzen.

(1) $\exists \varepsilon > 0$: $\mu \otimes \mu(\{|x-y| < \varepsilon\}) < 1$

Ann.: $\mu \otimes \mu(\{|x-y| < \varepsilon\}) = 1 \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow \mu \otimes \mu(\{(x,y) : x = y\}) = 1$

$\Rightarrow \mu = \delta_x$ für ein $x \in \mathbb{R}$ $\underline{\text{y}}$ zur V.

(2) Sei $t \in [0,1[$ fest

$s \mapsto X_s(\omega)$ rechtsseitig stetig in t

$\Rightarrow$ für $t_k := t + \frac{1}{k}$ gilt $\lim_{k\to\infty} X_{t_k}(\omega) = X_t(\omega)$

$\Rightarrow (X_{t_k}(\omega))_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge $\Rightarrow$ zu $\varepsilon > 0 \ \exists k_0 : |X_{t_{k+1}}(\omega) - X_{t_k}(\omega)| < \varepsilon \ \forall k \ge k_0$

$\Rightarrow \{\omega \in \Omega : s \mapsto X_s(\omega) \text{ rechtsseitig stetig}\} \subseteq \{\omega \in \Omega : s \mapsto X_s(\omega) \text{ rechtsseitig stetig in } t\}$

$$\subseteq \bigcup_{k_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{k \ge k_0} \{|X_{t_{k+1}} - X_{t_k}| < \varepsilon\}$$

Stetigkeit von rechts

$(\forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 : \forall k \ge k_0 \dots)$

Zu Aufg 4

Sei $A_k := \{\omega \in \Omega : |X_{t_{k+1}} - X_{t_k}| < \varepsilon\}$

$$\Rightarrow P(A_k) \overset{TS}{=} P_{(X_{t_k}, X_{t_{k+1}})}(\{(x,y) : |y-x| < \varepsilon\})$$

$$\overset{el.V}{=} \mu \otimes \mu(\{|y-x| < \varepsilon\} =: q < 1 \quad \text{nach (1)}$$

Es gilt $P(A_{k_0} \cap A_{k_0+2} \cap A_{k_0+4})$

$$= P(\{|X_{t_{k_0+1}} - X_{t_{k_0}}| < \varepsilon\} \cap \{|X_{t_{k_0+3}} - X_{t_{k_0+2}}| < \varepsilon\} \cap \{|X_{t_{k_0+5}} - X_{t_{k_0+4}}| < \varepsilon\})$$

$$= P(\qquad) \cdot P(\qquad) \cdot P(\qquad)$$

X_t unabh (gem. vert.)

Weiter gilt $\bigcap_{k \geq k_0} A_k \subseteq \bigcap_{k=0}^{n-1} A_{k_0+2k} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

und $P(\bigcap_{k=0}^{n-1} A_{k_0+2k}) \underset{(X_t \text{ unabh})}{=} \prod_{k=0}^{n-1} P(A_{k_0+2k})$

$= q^n \to 0, \; n \to \infty,$

da $q < 1$

$$\Rightarrow P(\bigcap_{k \geq k_0} A_k) = 0$$

$$\Rightarrow P(\{\omega \in \Omega : s \mapsto X_s(\omega) \text{ rechtsseitig stetig}\})$$

$$\leq P(\bigcup_{k_0 \in \mathbb{N}_0} \bigcap_{k \geq k_0} \{|X_{t_{k+1}} - X_{t_k}| < \varepsilon\})$$

$$\leq \sum_{k_0 \in \mathbb{N}_0} P(\bigcap_{k \geq k_0} A_k) = 0.$$