Aufgabe 4:

Für $p \in]0,1[$, $n \in \mathbb{N}$ betrachte die Vert-Fkt $F_{n,p}$ der ZV

$$\frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}(S_n - np) \quad \text{für eine } B_{n,p} \text{ verteilte ZVe } S_n$$

(a) Bestimme $C = C(p)$, so dass

$$\|F_{n,p} - \phi\|_\infty \leq C/\sqrt{n}$$

für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Bew: Es seien (X_i) u.i.v. ZVe mit $P_{X_i} = B_{1,p}$ $\forall$ $i \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ (X_i) sind quadratisch integrierbar und es gilt:

$E(X_n) = p$, $Var(X_n) = p \cdot (1-p)$

$$\overset{\text{ZGWS}}{\Rightarrow} \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}}(S_n - np) \to Y \sim N(0,1) \text{ in Verteilung}$$

Nach dem Satz von Berry-Esséen gilt:

$$\|F_{n,p} - \phi\|_\infty \leq \frac{3}{\sqrt{n}(p(1-p))^{3/2}} E(|X_n - p|^3)$$

$$= \frac{3}{\sqrt{n}(p(1-p))^{3/2}} \cdot |p|^3(1-p) + |1-p|^3 p$$

$$= \frac{3}{\sqrt{n}(p \cdot (1-p))^{3/2}} \cdot p(1-p)(p^2 + (1-p)^2)$$

$$= \frac{3}{\sqrt{n}} \frac{(p^2 + (1-p)^2)}{\sqrt{p(1-p)}} =: \frac{C(p)}{\sqrt{n}}$$

$$\Rightarrow C(p) = \frac{3(p^2 + (1-p)^2)}{\sqrt{p(1-p)}}$$

(b) z.z.: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{4\pi n}\, B_{2n,1/2}(\{n\}) = 2$

Beweis: $\sqrt{4\pi n}\, B_{2n,1/2}(\{n\}) = \sqrt{4\pi n} \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-n}$

$$= \sqrt{4\pi n}\ \frac{(2n)!}{n!\,n!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$= \frac{\sqrt{4\pi n}}{4^n}\ \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

Stirlingsche Formel: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{-n} n^n \sqrt{n}\sqrt{2\pi}}{n!} = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{4\pi n}\, B_{2n,1/2}(\{n\}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4\pi n}}{4^n} \cdot \frac{e^{-2n}(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}}{\left(e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}\right)^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4\pi n}{\cancel{4^n}}\ \frac{\cancel{2^{2n}}\cdot \cancel{n^{2n}} \cdot \cancel{e^{-2n}}}{\cancel{n^{2n}}\, \cancel{e^{-2n}} \cdot 2\pi n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4\pi n}{2\pi n} = 2.$$

$\Rightarrow \exists\ 0 < \mu \leq 2$ mit $\sqrt{4\pi n}\, B_{2n,1/2}(\{n\}) \geq \mu \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \|F_{2n,1/2} - \Phi\|_\infty \geq |F_{2n,1/2}(0) - \Phi(0)|$

$$\overset{(*)}{=} \left|\frac{1}{2} + \frac{1}{2} B_{2n,1/2}(\{n\}) - \frac{1}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2} B_{2n,1/2}(\{n\})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4\pi n}}{\sqrt{4\pi n}} B_{2n,1/2}(\{n\})$$

$$\geq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi n}} \cdot \mu$$

$$=: \frac{\tilde{c}}{\sqrt{n}} \quad \text{mit } \tilde{c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mu$$

zu (*):

Es gilt:

$$F_{2n,1/2}(0) = P\left(\left\{\frac{1}{\sqrt{2n\cdot\frac{1}{4}}}\left(S_{2n} - 2n\cdot\frac{1}{2}\right) \le 0\right\}\right)$$

$$= P\left(\left\{\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}}}\left(S_{2n} - n\right) \le 0\right\}\right)$$

$$\sqrt{\tfrac{n}{2}} > 0 \longrightarrow = P\left(\left\{S_{2n} - n \le 0\right\}\right)$$

$$= P\left(S_{2n} \in \{0,\dots,n\}\right)$$

$$= B_{2n,\frac{1}{2}}\left(\{0,\dots,n\}\right)$$

Weiterhin gilt:

$$1 = \sum_{k=0}^{2n} B_{2n,1/2}(\{k\})$$

symm. $$= 2\cdot\sum_{k=0}^{n-1} B_{2n,1/2}(\{k\}) + B_{2n,1/2}(\{n\})$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\sum_{k=0}^{n-1} B_{2n,1/2}(\{k\}) = 1 - B_{2n,1/2}(\{n\})$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\Big(\underbrace{B_{2n,1/2}(\{0,\dots,n\})}_{=F_{2n,1/2}(0)} - B_{2n,1/2}(\{n\})\Big) = 1 - B_{2n,1/2}(\{n\})$$

$$\Leftrightarrow F_{2n,1/2}(0) = \frac{1}{2}\left(1 + B_{2n,1/2}(\{n\})\right)$$