Inhalt der Vorlesung Stochastik I. So-Se 2006 (W. Hazod)

Der Inhalt ist zu etwa 90% seit Jahren unverändert, lediglich die Reihenfolge variiert von Jahr zu Jahr. Aus Erfahrung weiß ich, daß dieser Stoffumfang studierbar ist. Der Anteil an Statistik, insbesondere der statistischen Begriffsbildungen, schwankt ebenfalls.
Maßtheorie wurde nur in rudimentärer Form verwendet, dies wird in "Stochastik II" verlagert, dagegen wurde den Anwendungsbeispielen viel Platz eingeräumt. (Dafür ist in Stochastik II nur noch wenig Platz.)

§0 *Notationen*

§1 *Mathematische Modellbeschreibung:* Ereignisse als Mengen, logische Operationen als Mengenoperationen. Wahrscheinlichkeiten und ihre Eigeschaften. (σ-Additivität als matheamtische Forderung) Die deMorganschen Formeln. Eigenschaften von Mengensystemen. (σ-Algebren als matheamtische Forderung) Häufigkeitsansatz und subjektive Wahrscheinlichkeiten.

§2 *Diskrete (höchstens abzählbare) W'Räume* Produkte (unabhängige Koppelungen) und Bilder von W-Räumen.

§3 *Endliche W'Räume (Laplace Räume, Gleichverteilung auf endlichen Mengen)* Kombinatorische W'keit: Standardformeln und -beispiele. Erste Asymptotik (Geburtstagsproblem / Binomialverteilung versus hypergeometrische Vt. / Binomialvt. v. Possonverteilung (einfachste Version)).

§4 *Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Verteilungen mit Dichten.* Standardbeispiele geometrischer W'keiten wie z.B. das Bertrandsche Paradoxon leiten über zu Verteilungsfunktionen und Verteilungen mit Dichten. Bildverteilungen, Verteilungsfunktionen und Schwänze.

§5 *Beispiele spezieller Verteilungen* Wichtigste Beispiele (z.T. schon vorher motiviert) von Verteilungen, deren Verteilungsfunktionen, Schwänze und ggf. Dichten.

§6 *Elementare bedingte Wahrscheinlichkeiten.* Bayessche Formel, Produktsatz, S.v.d. totalen Wahrscheinlichkeit ....

§7 *Zufallsvariable und Verteilungsfunktionen* Transformationen von Zufallsvariablen und Verteilungen. Mediane und Quantile.

§8 *Markoffketten* Übergangsmatrizen und -Graphen. Chapman-Kolmogoroff Gleichungen. Meist wird der zeitlich-homogene Fall behandelt. Invariante Verteilungen (Existenz und Berechnung), Standardbeispiele.
Langzeitverhalten von Markoffketten (zeitlich-homogen, endlicher Zustandsraum): Satz von Markoff, Mittelergodensatz.

§9 *Mehr über Verteilungen und Verteilungsfunktionen* Restlebensdauerverteilungen, Hazardraten, Maximum Likelihood Schätzer. Bedingte Wahrscheinlichkeiten $W(\,\cdot\,|\mathfrak{A})$ für eine durch eine Zerlegung definierte $\sigma-$Algebra $\mathfrak{A}$. (Die Fortsetzbarkeit des durch eine Verteilungsfunktion definierten Inhalts zu einem Maß (Lebesgue-Stieltijes-Maß) wird nicht bewiesen).

§10 *Unabhängigkeit; Verteilungen auf Produkträumen. Gemeinsame Verteilungen und Marginalverteilungen* Wiederholung: Zufallsvariable, Meßbarkeit, Bildverteilung. Produktverteilung (Existenz des Produktmaßes ohne Beweis), Gestalt der Randverteilungsdichten.
Definition der Unabhängigkeit (2 Mengen, endlich viele Mengen, Unabhängigkeit von σ-Algebren, Unabängigkeit von Zufallsvariablen). Charakterisierung der Unabhängigkeit von Zufallsvariablen durch (1) Produktverteilungen, (2) Verteilungsfunktion der gemeinsamen Verteilung (3) Gestalt der Dichten
Anwendungen u.a. auf Markoffketten: iterierte Funktionensysteme als Markoff Ketten, insbes. AR Modelle, Lagerhaltungsmodelle. / Das *Sekretärinnenproblem.*

§11 *Mehr über Verteilungen auf Produkträumen. Gemeinsame Verteilungen.* Gestalt der Dichten (falls vorhanden). Transformation von Verteilungen mit Dichten (Lebesguesche Transformationsformel wird vorausgesetzt). Speziell: Verteilung von Summen / Produkten / Quotienten /Maxima / Minima von Zufallsvariablen, insbesondere im Fall der Unabhängigkeit. Faltung von Verteilungen mit Dichten.

Beispiele von Verteilungen der mathematischen Statistik.

§12 *Summen unabhängiger diskreter Zufallsvariabler*. Faltungen diskreter Maße. Poissonapproximation der Binomialverteilung (vgl. §3) mit Fehlerabschätzung.

§13 *Erwartungswert und Momente* Erwartungswert als Integral. Abriß der Integrationstheorie. Eigenschaften des Erwartungswertes. Der Spezialfall diskreter Verteilungen und Verteilungen mit Dichten. Transformationssatz.
Varianz, Kovarianzen, Unkorreliertheit. Satz von Bienaymè. C-S-Ungleichung.
Bedingte Erwartung $E(\,\cdot\,|\mathfrak{A})$ (vgl. §9). Beispiele: Irrfahrten, Definition eines Martingals.

§14 *Ungleichungen* Tschebyscheff-Markoff Ungleichungen, Exponential Ungleichungen.

§15 *(Schwaches) Gesetz der großen Zahlen (G.d.g.Z.) (Version I)* für p.w. unkorrelierte ZV, inklusive Fehlerabschätzungen. Fehlerabschätzung mittels Tschebyscheff Ungleichung. (Hoeffding Ungleichung o. Bew.)
Elemente der Statistik: Konfidenzintervalle / Erwartungstreue Schätzer: Stichprobenmittel und Stichprobenvarianz (Übungen).
Summen unabhängiger Zufallsvariabler. Faltungsformeln für Dichten. Die wichtigsten Verteilungen der mathematischen Statistik.
Anwendungen: Monte Carlo Methoden.

§16 *Momenterzeugende Funktionen, Fourier- und Laplace Transformierte* Momenterzeugende Funktion, Laplace- und Fouriertransformierte, erzeugende Funktion. Stochastische und schwache Konvergenz, Konvergenz im p-ten Mittel und Konvergenz in der (Totalvariations-)Norm (l_1-Norm für Verteilungen auf $\mathbb{Z}_+$).
Ohne Beweis: Stetigkeitssatz von P. Lévy und Eindeutigkeitssatz für Fouriertransformierte.

§17 *Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie* Konvergenzbegriffe der W-theorie: Schwache Konvergenz und äquivalente Beschreibungen (Portmanteau Theorem) / Summen unabhängiger ZV: (Schwaches) G.d.g.Z. (Version II, vgl §15), Zentraler Grenzwertsatz - ZGWS (für unabhängige identisch verteilte Summanden). Fehlerabschätzung im ZGWS: Satz von Berry Esséen (ohne Beweis). Bsp. Normalverteilungsapproximation der Poisonverteilung, Normalverteilungsapproximation der Binomialverteilung.

§18 *Einige Anwendungsbeispiele* Wahlmanipulation *entschlossene Minderheiten*, Signalerkennung, Bestimmung von Konfidenzintervallen, Monte Carlo Methoden etc. Konvergenz von Wartezeiten, d.h. Konvergenz geometrischer Vt. gegen Expopnentialverteilung beim radioaktiven Zerfall: Halbwertzeit.