Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod

14.04.2008

Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie SoSe 2008
Blatt 1

Wiederholen Sie aus den Anfängervorlesungen:

Aufgabe 1 **a)** Seien $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, mit $|a_n|, \; |b_n| \leq K$ für alle n.
Dann gilt:

$$\left| \prod_1^N a_n - \prod_1^N b_n \right| \leq K^{N-1} \sum_1^N |a_n - b_n|$$

b) Zeigen Sie, daß eine analoge Abschätungen für Matrizen (bzw. lineare Abbildungen) gilt.

Aufgabe 2 **a)** Zeigen Sie:
Für $x \in \mathbb{C}$ gilt (kompakt-gleichmäßig in x):

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x$$

Beweisen Sie die Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit: Für $|x| \leq T$ gilt:

$$\left| \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x \right| \leq \frac{K(T)}{n}$$

für eine positive Konstante $K(T)$.

b) Beweisen Sie eine analoge Aussage für Matrizen (lineare Abbildungen)

Zeigen Sie anhand der Sätze und Beweise der Vorlesung:

Aufgabe 3 **a)** Seien X_n, X Z.V. mit Werten in einem separablen metrischen Raum (M, d). Sei $(\varepsilon_n > 0)$ eine Nullfolge. Es gelte $\sum_1^\infty W(d(X_n, X) > \varepsilon_n) < \infty$. Dann gilt $X_n \to X$ W-fast sicher.
b) Sei $X_n \to X$ W-stochastisch. Sei $g : M \to \tilde{M}$ eine Abbildung die in $a \in M$ stetig ist. Sei $X \cong a$ f.s. Dann gilt: $g \circ X_n \to g(a)$ W-stochstisch.

Aufgabe 4 **a)** Wiederholen Sie aus den Anfängervorlesungen den Beweis des **Satzes von Beppo Levi** (für einen W-Raum):
Sei (Ω, Σ, W) ein W-Raum. Seien $f_n : \Omega \to \mathbb{R}_+$ Z.V. mit (1) $f_n \leq f_{n+1}$ für alle n und (2) $\sup_n \int f_n dW < \infty$. Dann ist $f := \sup f_n$ W-integrierbar und man darf Limes und Integral vertauschen.