Technische Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod 1.06.2008

Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie SoSe 2008
Blatt 6

Aufgabe 20 Beweisen Sie das *Differentiationslemma*: (Ω, Σ, W) sei ein Wahrscheinlichkeitsraum (oder $\sigma-$endlicher Maßraum), $F : \Omega \otimes [a, b]$ sei eine Abildung, die in der ersten Komponente für alle $t \in [a, b]$ integrierbar, und in der zweiten Komponente differnzierbar ist. Unter der folgenden Voraussetzungen kann man Differentiation und Integration vertauschen, i.e. man erhält

$$\int_\Omega \frac{d}{dt} f(\omega, t) dW(\omega) = \frac{d}{dt} \int_\Omega f(\omega, t) dW(\omega)$$

Es existiert eine integrierbare Funktion $h : \Omega \to \mathbb{R}_+$ mit $|\frac{d}{dt} f(\omega, t)| \le h(\omega)$ für alle (ω, t).

(In einem Eckpunkt des Intervalls betrachtet man rechts- bzw. linksseitige Ableitungen.)

Folgern Sie daraus: Für Zufallsvariable mit $k-$tem Moment ist die Fourier Transformierte $k-$fach differenzierbar und man kann die Momente mittels der Ableitungen der Fourier Transformierten berechnen.

Aufgabe 21 Zeigen Sie: Jede geometrische Verteilung $Geo(p) = \sum_0^\infty pq^k \varepsilon_k$ ist als verallgemeinertes Poissonmaß $\exp(\alpha(\nu - \varepsilon_0))$ darstellbar.
Hinweis: Die Fouriertransformierte ist darstellbar als

$$\exp\left(-\log(1 - qe^{iy}) - (-\log(1 - q)\right) = \exp\left(\sum_1^\infty q^k e^{iky}/k - (-\log(1 - q))\right)$$

Zeigen Sie: Dies gilt auch für *verallgemeinerte* geometrische Verteilungen der Gestalt
$\sum_0^\infty pq^k \mu^k$ für $\mu \in M^1(\mathbb{R}^d)$.

Aufgabe 22 Bestimmen Sie die Fouriertransformierten von
a) Poissonverteilungen **b)** $Geo_1(p) = \sum_0^\infty pq^k \varepsilon_{k+1}$
c) Normalverteilungen **d)** Cauchyverteilung

Aufgabe 23 Seien (X_k) unabhängige identisch verteilte Zufallsvariable mit Werten in $\{-1, +1\}$ und Verteilung $p\varepsilon_{-1} + q\varepsilon_1$. $S_n := \sum_1^n X_k,\ n \ge 1$, sei die zugehörige *Irrfahrt*. Geben Sie die Fouriertransformierte der Zufallsvariablen S_n an, sowie die einer *normierten* Irrfahrt $c(n)S_n + d(n)$ mit $c(n) > 0, d(n) \in \mathbb{R}$.

Wie sehen die Normierungskoeffizienten $(c(n), d(n))$ beim *Zentralen Grenzwertsatz* aus?