Universität Dortmund
Lehrstuhl Mathematik IV
Prof. Dr. W. Hazod

28.04.2008

Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitstheorie SoSe 2008
Blatt 3

Aufgabe 9 Beweisen Sie die folgenden Sätze von Cramér:
$X_n, X, Y_n : \Omega \to \mathbb{R}^d$ seien Zufallsvariable, ebenso $U_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $Z_n : \Omega \to \mathrm{End}(\mathbb{R}^d)$. Sei $X_n \to X$ in Verteilung.

a) Sei $Y_n \to Y$ stochastisch. Dann gilt $X_n + Y_n \to X$ in Verteilung.
b) Sei $U_n \to 1$ stochastisch. Dann gilt $U_n \cdot X_n \to X$ in Verteilung.
c) Sei $Z_n \to Id$ stochastisch. Dann gilt $Z_n(X_n) \to X$ in Verteilung.

Aufgabe 10 Sei $N \in \mathbb{N}$, seien $x_1, \ldots, x_N$ Punkte in $\mathbb{R}$. (Nicht notwendig alle verschieden.) Sei μ die Gleichverteilung auf $\{x_1, \ldots, x_N\}$, also $\mu = \frac{1}{N} \sum_1^N \varepsilon_{x_i}$. Bestimmen Sie **Verteilungsfiunktion, Median, Erwartungswert, Varianz** von μ. Insbesondere erhält man für $x_i := X_i(\omega)$ (wenn $X_1(\omega), \ldots, X_N(\omega)$ eine Stichprobe bezeichnet) die "empirischen" Größen.

Aufgabe 11 X, Y seien unabhängige reelle Zufallsvariable. $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien deterministische meßbare Funktionen.

a) Zeigen Sie: $(g(X), h(Y))$ sind wieder unabhängig.
b) Überlegen Sie sich anhand eines Beispiels, daß man *unabhängig* nicht durch *unkorreliert* ersetzen darf. $[\![$ Sei Z eine reelle Z.V., die auf $[0, 1]$ gleichverteilt ist. Dann sind $X := \cos(\pi X), Y := \sin(\pi X)$ unkorreliert, aber nicht unabhängig. Finden Sie passende Funktionen g, h, sodaß $g(X), h(Y)$ nicht unkorreliert sind. $]\!]$

c) Seien X, Y unkorrelierte reelle Z.V.. Sind dann stets X^2, Y^2 unkorreliert?

Aufgabe 12 Beweisen Sie Proposition 2.14:
Seien $(X_i)_{i \geq 1}$ unabhängige identisch verteilte reelle Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F_{X_i} = F$. $F_N^{(\omega)}(\cdot)$ seien die empirischen Verteilungsfunktionen, $N \in \mathbb{N}$. Seien $\widehat{m}_N(\omega)$ Mediane von $F_N^{(\omega)}(\cdot)$, m_F sei ein Median von F.

Falls der Median m_F eindeutig bestimmt ist ($\mathrm{Med}(F) = \{m_F\}$), dann konvergieren die "Stichprobenmediane" $\widehat{m}_N(\omega) \to m_F$ fast sicher.