

**Aufgabe 1:**

(a) Bestimmen Sie alle  $x \in \mathbb{R}$  mit

$$||x| - 3| \leq 1 \quad .$$

(b) Beweisen Sie, dass für  $a, b \geq 0$  gilt

$$|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a - b|} \quad .$$

**Aufgabe 2:** Beweisen Sie mit vollständiger Induktion

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

**Aufgabe 3:** Besitzt die Menge

$$M = \left\{ \frac{5n}{3n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

ein Infimum, Supremum, Maximum oder Minimum? Bestimmen Sie ggf. diese Größen und begründen Sie ihre Aussagen.

**Aufgabe 4:** Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \right) \quad ,$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1 + x - \frac{1}{2}x^2}{x^3} \quad .$

**Aufgabe 5:** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein offenes Intervall und seien  $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$  differenzierbare Funktionen. Bestimmen Sie alle  $x \in I$  in denen die Funktion

$$h(x) = \max \{f(x), g(x)\}$$

differenzierbar ist.

**Aufgabe 6:** Gegeben sei die abschnittsweise definierte Funktion  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = k + \sqrt{x - k} \quad \text{für} \quad k \leq x < k + 1 \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass  $f$  stetig und streng monoton wachsend ist.
- (b) Begründen Sie, ob  $f$  eine stetige Umkehrfunktion besitzt und bestimmen Sie ggf. diese Umkehrfunktion.
- (c) Ist  $f$  konvex oder konkav auf  $\mathbb{R}$ ? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

**Aufgabe 7:** Sei  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x^n} = 0 \quad \text{für ein ungerades } n \in \mathbb{N}.$$

Beweisen Sie, dass ein  $x \in \mathbb{R}$  existiert mit  $x^n + f(x) = 0$ .

**Aufgabe 8:** Gegeben sei ein  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Bestimmen Sie das globale Minimum auf  $\mathbb{R}$  der Funktion

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (x - a_k)^2 \quad .$$

**Aufgabe 9:** Beweisen Sie:

$$\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{für } |x| < 1.$$

**Aufgabe 10:** Berechnen Sie:

- (a)  $\int_0^1 \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx$  ,
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\sin(nx^2)}{1+n} dx$  .