

Aufgabe 1: Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \leq 1 \quad .$$

Aufgabe 2: Zeigen Sie, dass für $x \geq 0$ und $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + \frac{n^2}{4} x^2 \quad .$$

Aufgabe 3: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n-n^2}$,

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right)$,

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2 - a)$ für $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4: Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei rekursiv gegeben durch

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{1}{6} a_n (8 - a_n) \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

(a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq 2 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist.

(c) Begründen Sie, ob die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert und berechnen Sie ggf. den Grenzwert.

Aufgabe 5: Sei $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Begründen Sie die Gültigkeit der Aussage

$$a := \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ existiert} \implies \lim_{x \rightarrow 0} f(x^2) \text{ existiert}$$

und bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0} f(x^2)$ in Abhängigkeit von a .

(b) Gilt auch die Umkehrung der Aussage in (a)? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

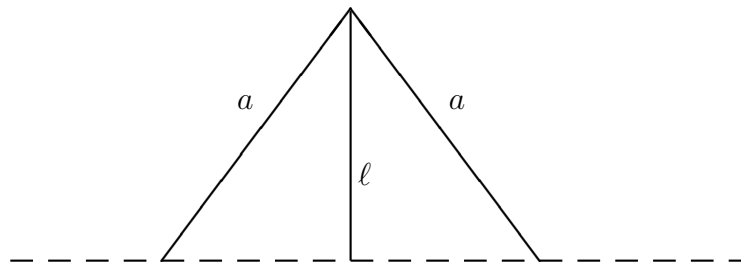
Aufgabe 6: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ in denen f stetig ist.
- (b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ in denen f differenzierbar ist und geben Sie die Ableitung $f'(x)$ an.

Aufgabe 7: Sei $f : [0, 2] \mapsto \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = f(2)$. Beweisen Sie, dass ein $x \in [0, 1]$ existiert mit $f(x) = f(x + 1)$.

Aufgabe 8: Aus einer quadratischen Plane mit Kantenlänge $2a > 0$ soll ein Zeltdach wie in der Skizze gebaut werden. Wie muss die Länge $\ell \in [0, a]$ der Mittelstange gewählt werden, damit das Volumen unter dem Zeltdach maximal wird? Vorderansicht des Zeltdaches:



Wie groß ist dann die Grundfläche unter dem Zeltdach?

Aufgabe 9: Leiten Sie je eine Stammfunktion zu den folgenden Funktionen f über geeigneten Intervallen her:

- (a) $f(x) = \arctan x$.
- (b) $f(x) = (\log x)^2$.

Aufgabe 10: Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_0^1 \frac{4x(x^2 + 1)}{x^4 + 2x^2 + 1} dx \quad .$$