Zur Entwicklung der Geburtenzahl in Deutschland *

von Manfred Reimer

Die Entwicklung der kollektiven Geburtenzahl ist für die Struktur der zukünftigen Gesellschaft von entscheidender Bedeutung. Debatten über die Wirtschaftsentwicklung, die Zukunft des Gesundheitswesens oder die mögliche Entwicklung der Renten sind völlig wertlos, wenn sie die Fundamentaldaten der Bevölkerungsentwicklung außer Acht lassen.

Es ist erfreulich, daß Politik und Gesellschaft in letzter Zeit der Geburtenentwicklung die ihr gebührende Aufmerksamkeit schenken. Und wenn politische Maßnahmen, wie etwa das 2006 eingeführte Elterngeld, zu einer Steigerung der Geburtenrate, also zu einer Trendwende geführt haben sollten, so wäre dies ein Grund zu gemeinsamer Freude. Und nicht zur Häme, die dem politischen Gegner den Erfolg nicht gönnt, oder gar zu einem "Krieg um Zahlen", wie DER SPIEGEL 33/2009 titelt.

Jeder Bürger kann sich über die jährlichen Geburtenzahlen durch einen Blick in das Statistische Jahrbuch [2] informieren. Es wird vom Statistischen Bundesamt herausgegeben und ist allgemein zugänglich. Für die Jahre 1997 bis 2010 sind die amtlichen Geburtenzahlen in der Spalte (2) unserer Tabelle aufgeführt. Für 2010 gilt sie erst vorläufig.

Jahr (1)	Geburtenzahl amtlich (2)	Trendzahl dazu (3)	Abweichung (2) gegen (3) in % (4)
1997	812173	805638	+0,81
1998	785034	789388	− 0,55
1999	770744	773465	− 0,35
2000	766999	757864	+1,60
2001	734475	742578	− 1,09
2002	719250	727599	− 1,14
2003	706721	712923	− 0,87
2004	705622	698543	+1,01
2005	685795	684453	+0,20
2006	672724	670647	+0,31
2007	684862	657120	+4,22
2008	682514	643865	+6,00
2009	665126	630878	+5,43
2010	677945	618153	+9,67

Vor dem Jahr 2007 legt unsere Tabelle eine Denkpause ein, da uns die Frage beschäftigt, ob von 2006 auf 2007 eine Trendwende eingetreten ist, zum Beispiel eben als Folge der Einführung des Elterngeldes. Dagegen spricht anscheinend, und so wird oft argumentiert, daß die

 Dortmund im April 2011. Aktualisiert am 12. Juli 2011.

Geburtenzahl 2008 bereits wieder etwas gesunken ist. Wer so argumentiert, übersieht, daß auch die Anzahl der möglichen Mütter inzwischen gesunken ist, und daß auch nur gleich bleibende Zahlen in einer schrumpfenden Gesellschaft bereits eine Trendwende anzeigen würden.

Wir wollen um diese Zahlen keinen "Krieg" führen, sondern das Handwerkzeug des Mathematikers einsetzen, um sie zu verstehen.

Als erstes sollte klar sein, daß eine Trendwende nur nachgewiesen werden kann, wenn man bereits einen Trend kennt, also eine Gesetzmäßigkeit in den bis dahin vorliegenden Daten. Eine bloße Beobachtung der jährlichen Veränderungen bei den amtlichen Geburtenzahlen genügt schon wegen ihrer statistischen Schwankungen nicht. Wesentlich sachgerechter ist es, die Trendfunktion aus einer geeigneten Parameter-abhängigen Familie von Ansatzfunktionen nach dem Prinzip der kleinsten Fehlerquadrate von Carl Friedrich Gauß zu bestimmen, also als eine sogenannte Ausgleichsfunktion. Dabei ist es eine Kunst, erst einmal die "richtigen" Ansatzfunktionen auszuwählen. Sie sollen von vornherein ein den Daten zugrundeliegendes Bildungsgesetz beschreiben, so daß nur noch die günstigsten Parameter aus den Daten selbst numerisch zu bestimmen bleiben. Bei Problemen des Wachtums oder des Zerfalls kommen in der Regel Exponentialfunktionen infrage. Auch in unserem Fall. Doch sind die Zusammenhänge im Falle der Geburtenentwicklung um so viel komplizierter, als etwa beim radioaktiven Zerfall, daß wir dies zunächst anhand eines mathematischen Modells besonders begründen müssen – es könnte ja auch ein ganz anderes Gesetz gelten!

Als nächstes bedenken wir, daß ein exponentieller Trend auch besagt, daß Funktionswerte sehr unterschiedlicher Größe auftreten können, so daß ein quadratischer Ausgleich der absoluten Fehler nicht ausreicht, sondern man besser beraten ist, die Quadratsumme der relativen Fehler zu minimieren.

Wir kommen zum mathematischen Modell. Dazu betrachten wir zu jedem Zeitpunkt u die Anzahl $w(u)$ der lebend geborenen Mädchen, wobei wir etwa den auf u folgenden Zeitraum von einem Jahr meinen. Die Zählung mag beginnen, wo sie will. An der heutigen Geburtenzahl $w(x)$ sind die Frauen einiger, aber nicht aller vorangehenden Jahrgänge beteiligt. Der Beitrag der vor u Jahren, also zum Zeitpunkt $x - u$ lebend geborenen Frauen zu $w(x)$ werde beschrieben durch die Anteilsfunktion $g(u)$, sei also unabhängig vom Zeitpunkt x gegeben durch

$$g(u) \cdot w(x-u). \tag{1}$$

Man störe sich nicht daran, daß wir uns sowohl x und u als auch $w(x)$ und $g(u)$ nicht unbedingt ganzzahlig, sondern als reelle Zahlen vorstellen.

Naturgemäß gilt also $g(u) = 0$ für $u < 10$, das heißt im Falle der unter 10 Jahre alten Mädchen, und für $u > 100$, das heißt im Falle der über 100-jährigen Frauen. Im allgemeinen gilt natürlich $0 \leq g(u) \leq 1$, und $g(27) = \frac{1}{20}$ würde zum Beispiel bedeuten, daß jede 20-te der vor 27 Jahren lebend geborenen Frauen in Jahresfrist ein Mädchen lebend zur Welt bringt. Darin ist eingerechnet, daß ein Teil von ihnen inzwischen durch Tod entfallen ist.

Den Beitrag aller heutigen Frauen zu $w(x)$ erhalten wir, indem wir die Beiträge (1) summieren. So erhalten wir den Zusammenhang

$$w(x) = \int_0^\infty g(u)\, w(x-u)\, du. \tag{2}$$

Wir können das noch etwas durchsichtiger formulieren, wenn wir

$$q := \int_0^\infty g(u)\,du \tag{3}$$

und

$$f(u) := \frac{1}{q} \cdot g(u) \tag{4}$$

setzen. Dann gilt nämlich $f(u) \geq 0$ und

$$\int_0^\infty f(u)\,du = 1, \tag{5}$$

$f(u)$ ist also eine sogenannte Verteilungsfunktion, und aus (2) ergibt sich zuletzt

$$w(x) = q \int_0^\infty f(u)\,w(x-u)\,du. \tag{6}$$

Die Verteilungsfunktion beschreibt im Grunde die Altersstruktur der Gebärenden, von der wir vorausgesetzt haben, daß sie sich in der Vergangenheit nicht (bzw. nicht wesentlich) geändert hat, während q ein kumulativer Proportionalitätsfaktor ist.

Man nennt (6) eine Funktionalgleichung. Die von uns gesuchte Funktion $w(x)$ ist eine ihrer Lösungen. Man erhält sie über den Ansatz

$$w(x) = c \cdot e^{\lambda x} \tag{7}$$

mit zunächst unbekannten Parametern c und λ. Bei Einsetzen von (7) in (6) erkennt man, daß es sich tatsächlich um eine Lösung handelt, falls die Bedingung

$$\frac{1}{q} = \int_0^\infty f(u)\,e^{-\lambda u}\,du \tag{8}$$

erfüllt ist. Das ist für genau ein λ der Fall. $c = w(0)$ ergibt sich als Anfangswert.

Eigentlich interessiert uns allerdings nicht die Geburtenzahl $w(x)$, sondern die kollektive Geburtenzahl $z(x)$ aller lebend Geborenen, der Mädchen und der Jungen. Sie ist jedoch (recht genau) doppelt so groß. Mit der Konstanten $a = 2 \cdot c$ gilt also

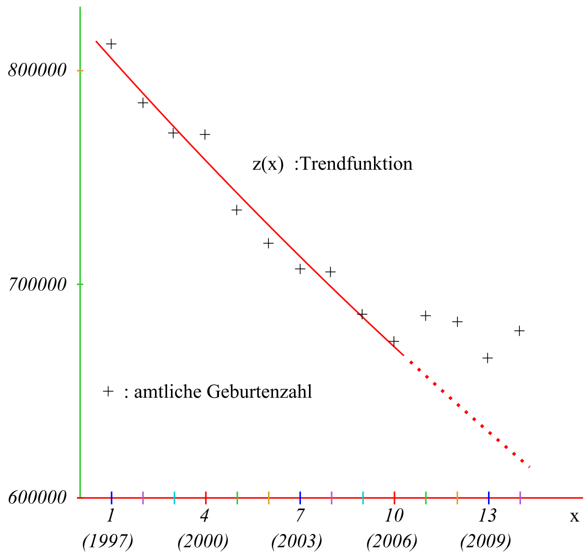
$$z(x) = a \cdot e^{\lambda x}. \tag{9}$$

Wie angekündigt, handelt sich um eine Exponentialfunktion.

Im weiteren beginnen wir unsere interne Zeitrechnung mit dem Jahr 1996 n. Chr. dem also unser Jahr $x = 0$ entspricht. Das Jahr 1997 n. Chr. ist danach unser Jahr $x = 1$, usw., 2010 n. Chr. das Jahr $x = 14$. Fast alle Frauen, die in diesem Zeitraum geboren haben, gehören bereits dem "Pillen-Zeitalter" an, so daß sich ein stabiles Reproduktionsverhalten ausbilden konnte und die Voraussetzungen unseres mathematischen Modells zunächst im wesentlichen zutreffen. Das Modell zeigt, daß es auch im Falle der Geburtenentwicklung sachgerecht ist, eine Exponentialfunktion (9) als Trendfunktion anzusetzen und die unbekannten Parameter λ und a so zu bestimmen, daß die Quadratsumme der relativen Fehler zum Minimum wird. Wenden wir dieses Prinzip auf die amtlichen Geburtenzahlen der Jahre 1997 bis 2006 an, also auf die zehn dem zu beurteilenden Jahr 2007 vorangehenden Jahre, so erhalten wir für die beiden Parameter die Werte

$$\boxed{\lambda = -\,0{,}020377, \ \ \mathrm{a} = 822223.}$$

Sie sind eindeutig bestimmt, solange die auszugleichenden Daten nur wenig von einem strengen exponentiellen Gesetz abweichen, [1], was bei uns der Fall ist. Mit ihnen ergeben sich die Trendzahlen in der Spalte (3) unserer Tabelle als Funktionswerte von $z(x)$. Die relativen Abweichungen der amtlichen Zahlen von den Trendzahlen sind in Spalte (4) aufgeführt. Alle Daten sind in unserer graphischen Darstellung sichtbar gemacht. Und wir kommen zu folgendem Schluß:



Geburtentrend

Die aus den Daten der Jahre 1997 bis 2006 als Ausgleichsfunktion ermittelte Trendfunktion $z(x)$ gibt die amtlichen Geburtenzahlen mit sehr geringen Abweichungen wieder, im Durchschnitt von 0,79 % nach oben bzw. nach unten. Die Abweichung beträgt nach oben maximal 1,60 % (2000) und nach unten maximal 1,14 % (2002). Die Wiedergabe der Jahre 1998, 1999, 2005 und 2006 ist besonders gut. Der Trend selber wird durch das Verhältnis

$$\frac{z(x+1)}{z(x)} = e^{\lambda} = 0,97983 \tag{10}$$

beschrieben, dem eine jährliche Abnahme um etwa 2,02 % entspricht und die wegen der statistischen Schwankungen kaum aus den Daten der Spalte (1) herausgelesen werden kann. Daß unsere Ausgleichsfunktion die empirischen Daten bei nur zwei verfügbaren Parametern so vorzüglich wiedergibt, zeigt insbesondere, wie zutreffend das dahinterstehende mathematische Modell ist.

Verlängert man nun den Trend in die Jahre 2007 bis 2010 hinein, und dem entspricht die Denkpause in unserer Tabelle und die punktierte Fortsetzung in unserer graphischen Darstellung, so zeigen die amtlichen Geburtenzahlen gegenüber dem Trend einen Sprung nach oben um 4,2 % im Jahre 2007, gefolgt von 6,0 % im Jahr 2008, 5,4 % im Jahr 2009, und sogar 9,7 % im Jahr 2010. Dem entsprechen 27742, 38649, 34248 bzw. 59792 zusätzliche Geburten.

Diese Abweichungen können bei allen noch möglichen Einwendungen nicht als zufällig angesehen werden und sprechen sehr deutlich dafür, daß die politischen Maßnahmen des Jahres 2006 die erhoffte Wirkung tatsächlich erzielt haben.

Es wurde eingewendet, 2008 sei die Geburtenzahl gegen 2007 ja wieder gesunken. Das ist zwar richtig, übersieht jedoch gerade die wesentliche Tatsache, daß inzwischen auch die Anzahl der Frauen im gebärfähigen Alter dem Trend entsprechend zurückgegangen ist. Dagegen ist die Abweichung vom Trend im Jahr 2008 mit etwa 6,0 % nach oben sogar bedeutend größer als 2007, am größten allerdings im Jahr 2010 mit 9,7 %.

Freilich muß auch die Möglichkeit bedacht werden, daß die Geburtenzahlen für 2007 bis 2010 auch ohne Einführung des Elterngeldes statistisch gesehen etwas vom Trend hätten abweichen können. Auch das ist richtig, kann aber in Anbetracht der Abweichungen in den Erhebungsjahren 1997 bis 2006 nur eine Abweichung innerhalb eines Korridors von höchstens 1,6 % erklären. Im ungünstigsten Falle, also nach Abzug dieses Betrages, bleiben jedoch in den Jahren 2007, 2008, 2009 und 2010 immer noch mindestens 2,6 %, 4,4 %, 3,8 % bzw. 8,1 % übrig, denen absolut gesehen mindestens 17085, 28330, 23973 bzw. 50070 zusätzliche Geburten entsprechen.

Es wäre indes gewagt, wollte man aus den Daten für die Jahre 2007 bis 2010 bereits einen neuen Trend ableiten. Rein rechnerisch wäre das zwar möglich, doch muß an die Voraussetzungen unseres Modells erinnert werden. Danach sollten sich q und die Verteilungsfunktion $f(u)$ über einen längeren Zeitraum hinweg nicht wesentlich ändern. Da wir gewiß sind, daß 2007 eine Trendwende stattgefunden hat, so ist diese Voraussetzung zumindest für q nicht mehr erfüllt. Es ist sogar zu erwarten, daß die Geburtenzahl weiterhin wieder stark sinkt, und zwar mindestens solange, bis die nach 2006 geborenen Mädchen selber ins gebärfähige Alter gekommen sein werden.

Literatur:

[1] Reimer, Manfred: Existenz und Eindeutigkeit exponentialer Ausgleichsfunktionen im Sinne des relativen Fehlers. Dortmund 2011.
Siehe Homepage, Electronic publications No. 2.

[2] Das Statistische Bundesamt Deutschland: Das Statistische Jahrbuch (bis 2010).

Adresse:
Prof. em. Dr. Manfred Reimer
Fakultät für Mathematik
Technische Universität Dortmund
D-44221 Dortmund