ANALYSIS I

Lösung der Klausur vom 25/02/14

Aufgabe 1

(a) Das Monotoniekriterium für Folgen besagt, dass monoton wachsende nach oben beschränkte Folgen $(a_n) \subset \mathbb{R}$ konvergent sind. Entsprechendes gilt für monoton fallende nach unten beschränkte Folgen.

(b) Eine Funktion $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst stetig, wenn sie in allen $x_0 \in (a,b)$ stetig ist; dabei ist f stetig in x_0, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in (a,b) : \; |x - x_0| < \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

oder äquivalenterweise, wenn für jede Folge $(x_n) \subset (a,b)$ gilt

$$x_n \longrightarrow x_0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$$

(c) Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung besagt, dass für eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, die auf (a,b) differenzierbar ist, ein $\xi \in (a,b)$ existiert mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

(d) Für eine beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sind das Ober- und Unterintegral wie folgt definiert:

$$\int^* f := \inf\{ \int_a^b t(x)dx \mid t \in T[a,b], t \geq f \}$$

$$\int_* f := \sup\{ \int_a^b t(x)dx \mid t \in T[a,b], t \leq f \}$$

f heisst Riemann-integrierbar falls $\int_* f = \int^* f$ gilt.

Aufgabe 2

(a) Die Dirichlet-Funktion $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \end{cases}$ ist auf $[-1,1]$ (so wie auf jedem anderen Intervall $[a,b]$, $a < b$) nicht Riemann-integrierbar, man hat nämlich

$$\int^* f = 1 \neq 0 = \int_* f$$

da jede nicht-leere offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ rationale und irrationale Zahlen enthält.

(b) Die auf $[0,1]$ definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ist offenbar unbeschränkt, also nicht Riemann-integrierbar (auch nicht uneigentlich, da $\int\limits_t^1 \frac{dx}{x} = -\ln t \longrightarrow \infty$ für $t \searrow 0$), aber auf $(0,1]$ stetig.

NB: Bei dieser Teilaufgabe wurde massenweise behauptet, eine solche Funktion würde nicht existieren - man beachte, dass die Implikation (stetig $\Rightarrow$ integrierbar) i.A. nur auf beschränkten abgeschlossenen Intervallen $[a,b]$ gilt, auf denen stetige Funktionen notwendigerweise beschränkt sind. Da jede Fortsetzung (stetig oder nicht) einer auf $(a,b]$ beschränkten stetigen Funktion auf ganz $[a,b]$ notwendigerweise integrierbar ist, muss hier ein legitimes Beispiel für $x \searrow 0$ unbeschränkt sein (kann aber dennoch auf $(0,1]$ uneigentlich integrierbar sein, wie z.B. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ oder $f(x) = \ln x$).

(c) Die Identitätsfunktion $f\colon (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ besitzt kein Maximum, da für jedes $x \in (0,1)$ ein $\delta > 0$ existiert mit $x + \delta \in (0,1)$; man nehme z.B. $\delta = \frac{1-x}{2}$. Diese Funktion nimmt jedoch ihr Maximum auf $[0,1]$ an. Eine Funktion ohne Maximum, die das nicht tut, wäre zum Beispiel $f\colon (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$.

(d) Die Folge von stetigen Funktionen $f_k\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f_k(x) = \begin{cases} \sqrt[k]{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$$

konvergiert punktweise gegen die Heaviside-Funktion auf $[-1,1]$: Unter Verwendung der Stetigkeit der Exponentialfunktion gilt nämlich

$$\sqrt[k]{x} = e(\frac{1}{k} \ln x) \longrightarrow e(0) = 1 \quad \text{für} \quad k \longrightarrow \infty$$

Aufgabe 3

(a) (i) Nach Monotonie der Wurzelfunktion gilt für die Folge

$2\sqrt{4k^2-5k+1}-4k \leq 2\sqrt{4k^2-4k+1}-4k = 2\sqrt{(2k-1)^2}-4k = 2(2k-1)-4k = -2,$

insbesondere ist $(2\sqrt{4k^2-5k+1}-4k)$ keine Nullfolge. Die Reihe divergiert.

Alternativ schreibe man

$$\frac{(2\sqrt{4k^2-5k+1}-4k)(2\sqrt{4k^2-5k+1}+4k)}{2\sqrt{4k^2-5k+1}+4k} = \frac{-20k+4}{2\sqrt{4k^2-5k+1}+4k} \longrightarrow -\frac{20}{8} \neq 0$$

(ii) Die Folge $a_k = \frac{1}{\sqrt{k^2+5}}$ ist eine monoton fallende Nullfolge, da $\frac{1}{\sqrt{k^2+5}} > \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2+5}}$ Nullfolge und $\frac{1}{\sqrt{k^2+5}} < \frac{1}{k}$. Folglich konvergiert die alternierende Reihe in (ii) nach dem Leibnizkriterium.

(iii) Es gilt

$$\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} : \frac{k!}{k^k} = (k+1)\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = \frac{k^k}{(k+1)^k} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$$

Die Reihe konvergiert nach dem Quotientenkriterium.

(b) (i) Kürze durch höchste Potenz ($= k^3$) und wende Grenzwertsätze an:

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} b_k = \lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{2(1+\frac{1}{k})^2 - \frac{4}{k^2} + \frac{5}{k^3}}{(1+\frac{2}{k})^3 - \frac{\sqrt{k}}{k^3} - \frac{1}{k^3}} = \frac{2(1+\lim\limits_{k\longrightarrow\infty}\frac{1}{k})^2 - \lim\limits_{k\longrightarrow\infty}\frac{4}{k^2} + \lim\limits_{k\longrightarrow\infty}\frac{5}{k^3}}{(1+\lim\limits_{k\longrightarrow\infty}\frac{2}{k})^3 - \lim\limits_{k\longrightarrow\infty}\frac{\sqrt{k}}{k^3} - \lim\limits_{k\longrightarrow\infty}\frac{1}{k^3}} = 2$$

(ii) Es ist $0 < 3^{\frac{1}{k}} - 1 < 1$ für $k > 1$, so dass

$$0 \leq b_k = \left(3^{\frac{1}{k}}-1\right)^k = \left(3^{\frac{1}{k}}-1\right)\left(3^{\frac{1}{k}}-1\right)^{k-1} < \left(3^{\frac{1}{k}}-1\right) \longrightarrow 0 \quad \text{für } k \longrightarrow \infty$$

Folglich gilt $b_k \longrightarrow 0$ nach dem Sandwich-/Einquetschkriterium.

Hier ist ein cooler alternativer Beweis:

Aufgrund der Monotonie der Exponential- und der Potenzfunktionen auf $\mathbb{R}^+$ gilt

$$b_k = \left(3^{\frac{1}{k}} - 1\right)^k \geq \left(3^{\frac{1}{k+1}} - 1\right)^k \geq \left(3^{\frac{1}{k+1}} - 1\right)^{k+1} > 0$$

Die Folge ist also monoton fallend und nach unten beschränkt, also konvergent nach dem Monotoniekriterium. Setze $b := \lim\limits_{k \longrightarrow \infty} b_k \geq 0$.

Angenommen es gilt $b > 0$; dann

$$b_k = \left(3^{\frac{2}{2k}} - 1\right)^k = \left(3^{\frac{1}{2k}} - 1\right)^k \left(3^{\frac{1}{2k}} + 1\right)^k = \sqrt{b_{2k}}\left(3^{\frac{1}{2k}} + 1\right)^k \quad \Rightarrow \quad \frac{b_k}{\sqrt{b_{2k}}} = \left(3^{\frac{1}{2k}} + 1\right)^k$$

Im letzten Term konvergiert der Ausdruck auf der linken Seite gegen $\frac{b}{\sqrt{b}} = \sqrt{b}$ aufgrund der Stetigkeit der Wurzelfunktion, während der auf der rechten (bestimmt) divergiert. Widerspruch zur Annahme $b > 0$. Folglich ist (b_k) eine Nullfolge.

(iii) Es ist $b_k = \frac{\log k^k}{k^2} = \frac{k \log k}{k^2} = \frac{\log k}{k}$ nach Logarithmengesetz. Betrachte die Funktion $f(x) = \frac{\log x}{x}$. Nach der l'Hopital'schen Regel gilt

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Für die Wahl der Folge $x_k = k \longrightarrow \infty$ erhält man also

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} b_k = \lim_{k \longrightarrow \infty} f(x_k) = 0$$

Aufgabe 4

Induktion über $n \in \mathbb{N}$: Für $n = 1$ gilt (IA):

$$\sum_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = 1^2 = \left(\sum_{k=1}^{1} k\right)^2$$

Die Aussage gelte nun für ein festes $n \in \mathbb{N}$ (IV). Dann folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3 \overset{\text{IV}}{=} \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + \underline{(n+1)^3}$$

Rückwärts-Rechnen liefert:

$$\left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 + \underline{2(n+1)\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)^2}$$

Zu zeigen ist also die Gleichheit der beiden unterstrichenen Ausdrücke. Es gilt

$$2(n+1)\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)^2 = 2(n+1)\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right] + (n+1)^2 = n(n+1)^2 + (n+1)^2 = (n+1)^3$$

und damit für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} k\right)^2$$

Aufgabe 5

(a) Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$: Für $n = 0$ gilt (IA): Es gilt $a_0 = \sqrt{a_0 a_0} < \sqrt{a_0 b_0} =: a_1$ aufgrund der Monotonie der Wurzelfunktion, und weiterhin

$$a_1 := \sqrt{a_0 b_0} \leq \frac{a_0 + b_0}{2} =: b_1,$$

da die folgende Ungleichung im Allgemeinen gilt:

$$\sqrt{a_0 b_0} \leq \frac{a_0 + b_0}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{a_0 b_0} \leq a_0 + b_0 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{a_0}^2 - 2\sqrt{a_0}\sqrt{b_0} + \sqrt{b_0}^2 \Leftrightarrow 0 \leq (\sqrt{a_0} - \sqrt{b_0})^2$$

Letztendlich

$$b_1 := \frac{a_0 + b_0}{2} < \frac{b_0 + b_0}{2} = b_0$$

Die Aussage gelte nun für ein festes $n \in \mathbb{N}_0$ (IV). Dann folgt (IS) analog zum (IA):

$$a_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} a_{n+1}} < \sqrt{a_{n+1} b_{n+1}} =: a_{(n+1)+1} := \sqrt{a_{n+1} b_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} =: b_{(n+1)+1}$$

$$\text{und weiterhin} \quad b_{(n+1)+1} := \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2} < \frac{b_{n+1} + b_{n+1}}{2} = b_{n+1}$$

(b) Nach (a) sind die Folgen (a_n), (b_n) monoton und beschränkt (durch a_0 nach unten und durch b_0 nach oben). Nach dem Monotoniekriterium existieren daher $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} b_n$. Es gilt

$$b = \lim_{n \longrightarrow \infty} b_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} b_{n+1} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{2} \overset{*}{=} \frac{a + b}{2}$$

Es folgt $\frac{a-b}{2} = 0$ und damit $a = b$. In * wurde der Grenzwertsatz für die Summe zweier konvergenter Folgen verwendet.

Aufgabe 6

(a) Auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist f differenzierbar als Komposition von differenzierbaren Funktionen und mittels der Ableitungsregeln gilt für $x \neq 0$

$$f'(x) = 1.\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x\left[-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right] = \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

(b) Für die Nullfolge $x_n = \frac{1}{n\pi}$ gilt

$$f'(x_n) = \cos(n\pi) + n\pi\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} = (-1)^n$$

Folglich kann $\lim\limits_{x \searrow 0} f'(x)$ nicht existieren.

(c) Der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

für $0 \neq x \longrightarrow 0$ existiert nicht, mit derselben Begründung wie in (b). Folglich ist f im Nullpunkt nicht differenzierbar.

Aufgabe 7

(a) Da die Stellen $z_k := (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ genau die Nullstellen der inneren Funktion $x \mapsto 1+\cos(x)$ sind, gilt $1+\cos(x) > 0$ ausserhalb der z_k, so dass f dort differenzierbar ist als Verkettung von differenzierbaren Funktionen. Dies legitimiert für $x \neq z_k$ die Anwendung der Kettenregel, was in den z_k aufgrund der Nicht-Differenzierbarkeit der Wurzelfunktion im Nullpunkt nicht möglich wäre (auch wenn dies keine Aussage über die Differenzierbarkeit von f in den z_k macht). Für $x \neq z_k$ erhält man nun mittels der Ableitungsregeln

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{1+\cos x}} \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{-\cos x \cdot 2\sqrt{1+\cos x} - [-\sin x]\frac{-\sin x}{\sqrt{1+\cos x}}}{4(1+\cos x)}$$

NB: f' lässt sich hier zwar vereinfachen als $f'(x) = -\mathrm{sgn}(x)\frac{1}{2}\sqrt{1-\cos x}$, aber diese Form würde die Differentiation an den geraden Vielfachen von π erheblich erschweren.

(b) Das Ausklammern von $\sqrt{1+\cos(x)}$ im Zähler von f'' hinterlässt den Term

$$\frac{-2\cos x - \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}}{4(1+\cos x)} = \frac{-2\cos x(1+\cos x) - \sin^2 x}{4(1+\cos x)^2} = \underbrace{-\frac{1}{4}}_{=:c} \frac{\overbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}^{=1} + 2\cos x + \cos^2 x}{(1+\cos x)^2},$$

Im letzten Ausdruck fasst sich der Zähler mittels binomischer Formel zusammen und kürzt sich vollständig weg. Es gilt daher $f''(x) = cf(x)$ mit $c = -\frac{1}{4}$ für $x \neq z_k$.
(c) Es gilt $f(0) = \sqrt{2}$ und $f'(0) = 0$. Wegen $f''(x) = cf(x)$ in einer Umgebung von $x_0 = 0$ folgt daraus

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} c^{\frac{n}{2}}\sqrt{2} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n}\sqrt{2}, & \text{n gerade} \\ 0, & \text{n ungerade} \end{cases}$$

NB: Streng genommen müsste dies noch per Induktion verifiziert werden, aber die Rechnung ist lediglich eine Anwendung von (b).

Die Taylor-Reihe im Nullpunkt ist damit gegeben durch

$$T^f_{x_0=0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0=0)}{n!}(x-0)^n \overset{n=2k}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\sqrt{2}}{4^k(2k)!}x^{2k}$$

mit Konvergenzradius $\rho = \infty$.

Aufgabe 8

(a) Substituiere $y = 1 - x^2$; dann

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}x dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\underbrace{(-2x)}_{=y'} dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{y(0)}^{y(1)} \sqrt{y} dy = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[y^{\frac{3}{2}}\right]_1^0 = \frac{1}{3}$$

(b) Wende partielle Integration an:

$$\int\limits_0^\pi (\sin x)x^2 = -\int\limits_0^\pi (-\cos x)2x dx + \left[(-\cos x)x^2\right]_0^\pi = 2\int\limits_0^\pi (\cos x)x dx + \pi^2$$

Und gleich noch einmal:

$$2\int\limits_0^\pi (\cos x)x dx + \pi^2 = -2\int\limits_0^\pi \sin x dx + [(\sin x)x]_0^\pi + \pi^2 = 2[\cos x]_0^\pi + \pi^2 = \pi^2 - 4$$

(c) Substituiere $y = \cos x$; dann

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = -\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\underbrace{(-\sin x)}_{=y'} dx = -\int\limits_{y(0)}^{y(\frac{\pi}{4})} \frac{1}{y} dy = -[\ln y]_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\ln 2$$

Aufgabe 9

(a) Sei $x \in (a,b)$ fest und sei $h \neq 0$ mit $x+h \in (a,b)$. Dann ist aufgrund des streng monotonen Wachstums $f(x+h) > f(x)$ für $h > 0$, sowie $f(x) > f(x+h)$ für $h < 0$. In beiden Fällen also

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0.$$

Die Grenzwertbildung liefert dann $f'(x) = \lim\limits_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$.

(b) Die Funktion $f\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist zum Einen streng monoton wachsend, da für $y > x$ gilt

$$y^3 - x^3 = (y-x)(y^2+yx+x^2) \geq (y-x)(y^2 - 2\,|y|\,|x| + x^2) = (y-x)(|y|-|x|)^2 \geq 0,$$

wobei mindestens eine der Ungleichungen für jedes Paar echt ist, und zum Anderen differenzierbar als Polynomfunktion mit $f'(0) = 3x^2|_{x=0} = 0$.

(c) Seien $x_0 \in (-1,1)$ und $\delta > 0$ mit $x_0 + \delta \in (-1,1)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert $\xi \in (x_0, x_0+\delta)$ mit

$$\frac{f(x_0+\delta)-f(x_0)}{\delta} = f'(\xi)$$

Da f streng monoton wachsend ist, gilt $f(x_0+\delta) > f(x_0)$ und somit $f'(\xi) > 0$.

NB: Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist hierbei überflüssig.

(d) Direkt: Da f streng monoton wächst und differenzierbar ist, gilt $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (-1,1)$. Wegen $f'(x_0) = 0$ hat dann f' in x_0 ein lokales Minimum. Folglich $f''(x_0) = 0$.

Indirekt: Wäre $f''(x_0) \neq 0$, dann würde f wegen $f'(x_0) = 0$ in x_0 ein lokales Extremum besitzen. Dann gäbe es $\delta > 0$, so dass $f(x_0) \geq f(x_0+\delta)$ bzw. $f(x_0-\delta) \geq f(x_0)$, beides im Widerspruch zum streng monotonen Wachstum von f.

NB: Auch die Stetigkeitsvoraussetzung von f'' ist hierbei überflüssig.

Aufgabe 10

Da f auf $[0, \infty)$ nicht-negativ und monoton fallend ist, existiert für alle $x \geq 0$ das $\min\limits_{[x,2x]} f(x)$ und gleicht $f(2x)$. Aufgrund der Monotonie des Riemann-Integrals folgt

$$\int\limits_x^{2x} f(t)dt \geq \int\limits_x^{2x} f(2x)dt = (2x - x)f(2x) = xf(2x) \geq 0$$

Da weiterhin f auf $[0, \infty)$ uneigentlich integrierbar ist, existiert (rein nach Definition) der Grenzwert $c := \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \int\limits_0^x f(t)dt$, womit dann gilt

$$0 \leq 2xf(2x) \leq 2\int\limits_x^{2x} f(t)dt = 2\int\limits_0^{2x} f(t)dt - 2\int\limits_0^x f(t)dt \longrightarrow 2c - 2c = 0 \quad \text{für } x \longrightarrow \infty$$

Dies zeigt, dass $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} (2x)f(2x) = 0$ und liefert nach Ersetzen von $2x$ durch x das gewünschte Ergebnis.