Versicherungsmathematik

Herbert Koch
Raum 631, Tel 3052
Email: koch@mathematik.uni-dortmund.de
Sprechstunde: Di 10-11 Uhr
Vorlesung: Di 14-16 Uhr, E28, Do 12-14 Uhr, E19

31. Januar 2005

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Organisation

Milbrodt/Helbig: Mathematische Methoden der Personenversicherung, de Gruyter 1999

H.U. Gerber: Life Insurance Mathematics (2nd. ed.), Springer, 1995.

K.H. Wolff. Versicherungsmathematik, Springer Verlag, 1975

K. Wolfsdorf. Versicherungsmathematik, Teil 1: Personenversicherung, Teubner, 1986

M. Koller. Stochastischer Modelle der Lebensversicherung. Springer Verlag 2004.

Leistungsnachweise zur Vorlesung werden nach bestandener Klausur am Ende des Wintersemesters vergeben. Die Deutsche Aktuarvereinigung (DAV) hat signalisiert, dass der Leistungsnachweis als Prüfungsleistung für die Prüfung

'Grundwissen Lebensversicherungsmathematik'

bei der DAV-Ausbildung angerechnet werden kann. Im Sommersemester 2005 wird es vielleicht ein Seminar aufbauend auf diese Vorlesung geben.

1.2 Was ist eine Versicherung?

Versicherung ist aus der Sicht des Versicherungsnehmers Mittel der Risikopolitik.

Versicherung ist aus der Sicht des Versicherungsunternehmens: Schutzversprechen als produziertes Wirtschaftsgut.

Gemeinsam: Risikotransfer gegen Entgeltzahlung.

Versicherung ist ein wirtschaftliches, juristisches und mathematisches Phänomenen.

Wirtschaftlich: Versicherungsgeschäft. ("Warum")

Juristisch: Versicherungsvertrag ("Was")

Mathematisch: Versicherungsgeschäft ("Wie")

Zitate

1. 'Versicherung ist Deckung eines im einzelnen ungewissen, insgesamt geschätzten Mittelbedarfs auf der Grundlage des Risikoausgleichs im Kollektiv und in der Zeit (Farhy, 1988)'
2. 'Versicherungsgeschäfte betreibt, wer, ohne dass ein innerer Zusammenhang mit einem Rechtsgeschäft anderer Art besteht, gegen Entgelt verpflichtet ist, ein wirtschaftliches Risiko dergestalt zu übernehmen, dass er

1. anderen vermögenswerte Leistungen zu erbringen hat, wenn sich eine für deren wirtschaftliche Verhältnisse nachteilige, ihrem Eintritt nach ungewisse Tatsache ereignet, um die dadurch verursachten Nachteile auszugleichen, oder

2. anderen vermögenswerte Leistungen zu erbringen hat, wobei es von der Dauer des menschlichen Lebens oder dem Eintritt oder Nichteintritt einer Tatsache im Lauf des menschlichen Lebens abhängt, ob oder wann oder in welchem Umfang zu leisten oder wie das Entgelt ist,

sofern der Risikoübernahme eine Kalkulation zugrunde liegt, wonach die dazu erforderlichen Mittel ganz oder im wesentlichen durch die Gesamtheit der Entgelte aufgebracht wird.' (Prölls 1997)

Charakteristiken

Finanzierung aus Entgelten

Ungewissheit hinsichtlich des versicherten Ereignisses

Risikokalkulation und Risikoausgleich

Zur Rolle des Zufalls:

Leistung	Fälligkeit	Teilgebiet (Beispiel)
fest	zufällig	Summenversicherung Kapitallebensversicherung Priv. Rentenversicherung Krankentagegeld
zufällig	fest	Jahresüberschadensrückvers. ('Stop-Loss-Rückversicherung')
zufällig	zufällig	Schadensversicherung: Haftplicht, Krankheitskosten

1.3 Versicherungssparten

Versicherungszweig $\sim$ Versicherungssparte $\sim$ Versicherungsbranche

Einteilungsprinzipien:

Versicherungsvertragsgesetz VvG

Versicherungsaufsichtsgesetz VaG

Art der Versicherungsleistung

1. Schadenversicherung: Ersatz von Vermögensschäden
2. Personenversicherung: Vertraglich vereinbarte Leistung, Summenversicherung

Versicherter Gegenstand:

1. Personenversicherung, Nichtpersonenversicherung
2. Exakte Beschreibung: Gebäude-, Tier-, Transportversicherung,
3. Vermögensversicherungen: Haftpflicht.

Versicherte Gefahr, Risikoart

1. Feuer-, Hagel-, Transportversicherung (Allgefahrabdeckung)

Wichtige Versicherungszweige

1. Bauleistungsversicherung
2. Berufunfähigkeitsversicherung
3. Einbruch, Diebstahl und Raub
4. Exportkreditversicherung
5. Gebäudeversicherung
6. Glasversicherung
7. Haftpflichtversicherung (Privat, Betriebs-, Berufs-)
8. Hagelversicherung
9. Hausrat
10. Kraftfahrzeugversicherung
11. Krankenversicherung
12. Kredit- und Kautionsversicherung
13. Lebensversicherung

Sonderformen: Captive-Versicherung (Selbstversicherung), Rückversicherung.
Prämien können konstant oder variabel sein.

1.3.1 Das Spartentrenngebot

Lebensversicherungs- (LV) und Private Krankenversicherungsgeschäft (PKV) zur Vermeidung von 'Risikotransfer' zwischen den Sparten getrennt von anderen Sparten betreiben.

Es gibt ein bedingtes Spartentrenngebot für Rechtsschutz.

1.4 Die Rolle der Versicherungsmathematik

Versicherungsmathematik: Mathematische Modelle und Methoden, die quantifizierbare Sachverhalte des Versicherungswesens beschreiben oder erklären oder mit deren Hilfe Entscheidungsprobleme der Versicherungswirtschaft gelöst werden. (Hilton 1988)

1.4.1 Hauptaufgabe der Versicherungsmathematik

Bereitstellung von Kalkülen, deren Anwendung durch ein Versicherungsunternehmen einen Risikoausgleich zwischen den Versicherungsnehmern und über die Zeit erlaubt.

Sachgebiete:

Personenversicherungsmathematik

Schadenversicherungsmathematik (ASTIN, Actuarial Studies in Nonlife insurance)

Finanzmathematik (AFIR, Actual approach for Financial Risc)

1.4.2 Konkrete Aufgaben

1. Erstellung und Schätzung der Rechnungsgrundlage (Sterbetafeln, Vertafelung anderer Risikowahrscheinlichkeiten, wobei es gesetzliche Restriktion bezüglich des erlaubten Materials gibt).

2. Tarifierung und Prämienkalkulation (Nettoprämie, Kosten, Deckungskapital)

3. Versicherungstechnische Analyse (Überschussermittlung, Gewinnzerlegung nach Ursache, Renditeberechnung)

4. Risikoteilung (VN-VU-Rückversicherung)

5. Risikoreserveberechnung

Versicherungsmathematiker als *Produktingenieur des Versicherungswesens*. Rolle des Versicherungsmathematikers gesichert durch Bedarf, Tradition, Erfolg und Gesetz.

1.5 Modelle und Methoden der Versicherungsmathematik

1.5.1 Deterministische Modelle

Eingangs- und Zielgrößen werden als deterministisch angesehen (Zinssatz, Kosten), oder durch ihre Erwartungswerte ersetzt (Erwartete Anzahl Überlebender, erwarteter Schaden). Ungeeignet zur Abbildung von Vorgängen des Versicherungsgeschäfts, bei denen Zufallsschwankungen um den Mittelwert von Bedeutung sind.

Beispiele:

1.
   - $\mathcal{L}(\text{Schadenzahl}) = B(1, 1/2)$ *Bernoulliverteilung*
     Schadenshöhe 1, $E(\text{Schaden}) + 1/2$, $\text{Var}(\text{Schaden}) = 1/4$.
   - $\mathcal{L}(\text{Schadenzahl}) = B(1, 1/6)$ *Bernoulliverteilung*
     Schadenshöhe 3, $E(\text{Schaden}) + 1/2$, $\text{Var}(\text{Schaden}) = 5/4$.

   Im deterministischen Modell gleiche Prämien.

2. Nach ADST (Allgemeine Deutsche Sterbetafel) 86/88 hat ein 40 jähriger Mann die 10 jährige Sterbewahrscheinlichkeit

$$_{10}q_{40} = \frac{95834 - 92471}{95834} = 0.03509$$

   und ein 60 jähriger Mann

$$_{10}q_{60} = \frac{83767 - 65508}{83767} = 0.2180$$

   $_{10}q_{40} \,/\, _{10}q_{40} = 6.213$, also müsste der 60 jährige etwa den 6.2 fachen Preis bezahlen. Die Varianz ist aber wesentlich höher.

1.5.2 Diskontinuierliche/kontinuierliche Methode

Diskontinuierliche Methode Höchstens abzählbar viele, meistens äquidistante Zeitpunkte, zu denen für das Versicherungsgeschäft relevante Ereignisse eintreten. Alle Zufallsvariablen, die Zeiten beschreiben, haben Werte in diesen Zeitpunkten.

Kontinuierliche Methode Nichtdiskrete Methode, Zufallsvariablen, die Zeiten beschreiben, haben reelle Werte.

Meistens hat das Versicherungsgeschäft gemischten Charakter. Zahlungen und Leistungen sind oft diskret, Versicherungsdauer und Eintritte von Versicherungsfällen diskret.

1.5.3 Stochastische Modelle

Ausgangspunkt ist ein stochastisches Modell des Versicherungsgeschehens (Prämieneinnahmen, Schäden) in einer Versicherungsperiode oder den gesamten Versicherungsverlauf.

1.5.4 Individuelle Modelle

Aussagen über aggregierte Größen (Gesamtschaden) ausgehend auf dem Einzelschaden.

1.5.5 Kollektives Modell

Modelliert den Gesamtschaden direkt.

1. *Individuelles Risikomodell (statisch)*

    - n unabhängige Versicherungsträger (Policen)
    - $X_1, \dots X_n$ zugehörige Schadenhöhe innerhalb Versicherungsperiode, stochastisch unabhängige, nichtnegative Zufallsvariablen mit Verteilungen $P_1 \dots P_n$.
    - Gesamtschaden:
    $$S_{ind} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$
    mit Verteilung
    $$P_{ind} = P_1 * P_2 \cdots * P_n \qquad \text{Faltung}$$

    Problem: Oft ist die Annahme der stochastischen Unabhängigkeit nicht gegeben.

2. *Kollektives Risikomodell (statisch)*

    - Schäden werden im Gesamtbestand ('Portefeuille') nach Anzahl und Höhe registriert.
    - N Schadenzahl innerhalb einer Periode
    - $X_1, \dots X_N$ Schadenhöhen in Auftrittsreihenfolge
    - $N, X_1 \dots X_N$ unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, Schadenverteilung gleich.
    - Gesamtschaden:
    $$S_{coll} = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Verteilung

$$\begin{aligned} P_{coll} : B \to P(S_{coll} \in B) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(\sum_{j=1}^{k} X_j \in B; N = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N = k) Q^{*k}(B) \end{aligned}$$

1.6 Versicherungsmathematische Bezeichnungsweisen

Bezeichungsgrundsätze

1. $${}^{\text{Frei}}_{\text{Dauer}}\text{Grundsymbol}^{\text{Zahlungsweise}}_{\text{Alter}}$$

2. X, Y, Z: Alter eines Mannes, einer Frau, eines Kindes

3. (X), (Y), (Z) männliche, weibliche Person, Kind

4. ω: Höchstalter (ADST 86/88: $\omega = 100$).

5. $\overline{\text{Buchstabe}}|$, $\overline{\text{Zahl}}|$ kennzeichnet eine feste, nichtzufällige Laufzeit.

6. Buchstabe$|_{...}$, Zahl$|_{...}$ kennzeichnet eine Aufschubzeit

1.6.1 Beispiele

1. $i^{(k)}$ nominaler Zinssatz bei $k-$tel jährlicher Zinszahlung und effektivem Jahreszins i
$$i^{(k)} = k((1 + i)^{1/k} - 1)$$

2. Grundsymbole, die mit dem Aussscheiden aus einem Kollektiv (Kohorte, Gesamtheit gleichaltriger gleichgeschlechtlicher Personen) zusammenhängen.

l Zahl der im Kollektiv befindlichen Personen

d Zahl der Ausgeschiedenen

p Verbleibwahrscheinlichkeit

q Ausscheidewahrscheinlichkeit

μ Ausscheideintensität

x_0 Alter der zu Beginn im Kollektiv befindlichen Personen, oft 0.

l_x Anzahl der im Kollektiv befindlichen $x-$jährigen nach $x - x_0$ Jahren.

$a_x = l_x - l_{x+1}$ Anzahl der im Altersintervall $(x, x+1]$ ausscheidenden Personen

${}_t\mathrm{p}_x$: bedingte Wahrscheinlichkeit eines/einer x-jährigen, auch im Alter $x+t+0$ noch zum Kollektiv zu gehören.

$p_x = {}_1\mathrm{p}_x$

${}_t\mathrm{q}_x$: bedingte Wahrscheinlichkeit eines/einer x-jährigen, im Alterintervall $(x, x+t]$ auszuscheiden.

${}_{s|t}\mathrm{q}_x$: bedingte Wahrscheinlichkeit eines/einer x-jährigen, im Alterintervall $(x+s, x+t+s]$ auszuscheiden (Alter x, Aufschubzeit s, Dauer t).

Die Notation ist international standardisiert.
Zusammenhang mit der Stochastik

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ Wahrscheinlichkeitsraum, Kohorte

$T : \Omega \to [0, \infty)$ messbar, Lebensdauer

${}_t\mathrm{p}_x = P(T > t + x; T > x)$

${}_t\mathrm{q}_x = P(T \leq t + x; T > x)$, $t \to {}_t\mathrm{q}_x$ ist die Verteilungsfunktion von $T - x/P(T > x)$ eingeschränkt auf $\{\omega : T(\omega) > x\}$

Bei m verschiedenen Ausscheideursachen $j = 1, \dots m$ (Kollektiv berufstätiger Personen; $m = 2$, Invalidität, Tod). Dann ist

${}_t\mathrm{q}_x^{(j)}$ die Wahrscheinlichkeit, dass (x) im Altersintervall $(x, x + t)$ aus der Ursache j ausscheidet - hier ist (j) keine Zahlungsweise.

l_x, d_x sind Erwartungswerte, $l_x = l_0\, {}_0\mathrm{p}_x$, rechnungsmäßige Zahl der Lebenden des Alters x.

Kapitel 2

Elementare Finanzmathematik: Der Zins als Rechnungsgrundlage

2.1 Verzinsung

Definition 2.1.1 *Versicherung: Die Kapitalfunktion $K(t)$ ist der Wert des Startkapitals 1 zur Zeit $t \geq 0$ unter Einfluss der Verzinsung.*

Mathematisch: $K(0) = 1$, monoton wachsend, rechtsseitig stetig.

p	Zinsfluß % pro Jahr
$i = p/100$	Zinssatz= effektiver Jahreszins
$r = 1 + i$	Aufzinsungsfaktor
$v = 1/r$	Abzinsungsfaktor
$d = 1 - v$	jährliche Diskontrate

$$d = \frac{i}{1+i}; \qquad iv = d, \qquad dr = i \tag{2.1.1}$$

Die Verzinsung kann kontinuierlich oder diskontinuierlich erfolgen:

1. *Zusammengesetzte (geometrische) Verzinsung*

$$K(t) = (1+i)^{[t]} \qquad \text{diskontinuierlich} \tag{2.1.2}$$

$$K(t) = (1+i)^{t} \qquad \text{kontinuierlich} \tag{2.1.3}$$

Auf/Abzinsung des Kapitals B gemäß

$$\mathcal{S}(t) = Br^{[t]}$$

$$\mathcal{S}(t) = Br^t$$

2. *Einfache Verzinsung:*

$$K(t) = 1 + [t]i \qquad \text{diskontinuierlich} \tag{2.1.4}$$

$$K(t) = 1 + ti \qquad \text{kontinuierlich} \tag{2.1.5}$$

Auf/Abzinsung des Kapitals B gemäß

$$\mathcal{S}(t) = B(1 + [t]i)$$

$$\mathcal{S}(t) = B(1 + ti)$$

3. *Gemischte Verzinsung:* Zusammengesetzte Verzinsung für volle Jahre, einfache für angebrochene Periode.

$$K(t) = r^{[t]}(1 + (t - [t])i) \tag{2.1.6}$$

Auf/Abzinsung des Kapitals B gemäß

$$\mathcal{S}(t) = B(1 + [t]i) \qquad \text{diskontinuierlich} \tag{2.1.7}$$

$$\mathcal{S}(t) = B(1 + ti) \qquad \text{kontinuierlich} \tag{2.1.8}$$

Lemma 2.1.2

$$K_{zus}(t) \leq K_{gem}(t) \leq K_{zus}([t] + 1)$$

Definition 2.1.3 *Es sei K absolut stetig und $k = K'$ an den Stellen, an denen K differenzierbar ist. Dann heißt*

$$\phi = k/K$$

die Zinsintensitätsfunktion der Kapitalfunktion K.

Bemerkung 2.1.4 *Falls ϕ stetig ist folgt*

$$K' = \phi K$$

und

$$K(t) = e^{\int \phi(t)dt}$$

Definition 2.1.5 (Effektive/Nominelle Zinsen) *Sei* $0 < \Delta < 1$ *ein Zeitintervall. Dann ist*

$$I_\Delta(x) = (K(x+\Delta) - K(x))/K(x)$$

der effektive Zins und

$$D_\Delta(x) = \frac{I_\Delta(x)}{1 + I_\Delta(x)}$$

der effektive Diskont zu $I_\Delta(x)$*. Die nominelle jährliche Zinsrate bei* Δ *jährlicher Verzinsung ist*

$$I_\Delta/\Delta,$$

und die nominelle jährliche Diskontrate ist

$$D_\Delta/\Delta$$

Der effektive Jahreszins ist der Zinssatz i *und der effektive Jahresdiskont ist*

$$d = \frac{i}{1+i}.$$

Der Aufzinsungsfaktor ist

$$r = 1 + i = K(1),$$

der Zinsfuß p *ist*

$$p = 100i,$$

der Abzinsungsfaktor oder Diskontisierungsfaktor ist

$$v = 1/r.$$

Satz 2.1.6 *Der effektive Jahreszins (-diskont) ist größer (kleiner) als der nominelle Jahreszins (diskont)*

Der Rechnungszins im Personenversicherungsgeschäft.

1. Rechnungsgrundlage erster Ordnung im Personenversicherungsgeschäft. Er ist als technischer Zins vorsichtig bemessen und gesetzlich vorgeschrieben (i=2.75%).

2. Rechnungsgrundlage zweiter Ordnung: Prognose zu Anfang des Jahres. Branchenwert realistisch 7.75% 1990, zur Zeit niedriger.

3. Rechnungsgrundlage dritter Ordnung: Faktisches Unternehmensergebnis.

4. Da die dauernde Erfüllbarkeit gewährleistet sein muß, rechnen die VU bei der Verzinsung ihrer Verpflichtungen mit Grundlagen erster Ordnung (angehalten durch das Bundesaufsichtamt für das Versicherungswesen (BAW). Dies führt zu Überschüssen.

5. Nachkalkulation mit Grundlagen zweiter und dritter Ordnung. Führt zur rückwirkenden Ausschüttung von Gewinnen, Überschussbeteiligung, nach Gesetz $\geq 90\%$, LVU Branchenmittel 1987 $\sim 97\%$.

2.2 BV-Funktionen und monotone Funktionen

Referenz: Kaballo, Einführung in die Analysis I, Kapitel 23, Einführung in die Analysis II, Kapitel 14.

Lemma 2.2.1 *Eine monotone Funktion hat höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.*

Definition 2.2.2 *Eine Zerlegung $Z = (a = x_0, x_1, \dots, b = x_N$ von $[a,b]$ ist eine streng monotone endliche Folge*

$$x_0 = a < x_1 < \dots x_N = b$$

mit der Feinheit

$$\delta(Z) = \max\{x_{j+1} - x_j\}.$$

Die Menge aller Zerlegungen sei $\mathcal{Z}$.

Definition 2.2.3 *Sei $[a,b]$ ein Intervall, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Wir definieren die Totalvariation*

$$\|f\|_{TV} = \sup_{Z \in \mathcal{Z}} \sum_{i=1}^{N} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \in [0,\infty) \cap \infty$$

und schreiben $f \in BV$ falls $\|f\|_{TV} < \infty$.

Bemerkung 2.2.4 *$\|.\|_{TV}$ ist keine Norm, da $\|1\|_{TV} = 0$. Es definiert jedoch eine Norm auf dem Raum aller Funktionen mit $f(a) = 0$. Es gilt*

$$|f(b) - f(a)| \le \|f\|_{TV}$$

und $\|f\|_{TV} < \infty$. Dieser Raum ist ein Banachraum. Es gilt

$$\|f\|_{TV([a,b])} = \|f\|_{TV([a,x])} + \|f\|_{TV([x,b])}.$$

Satz 2.2.5 *Es existieren genau dann monoton wachsende Funktionen g, h auf $I = [a,b]$ mit*

$$f = g - h,$$

wenn $f \in BV([a,b])$.

Beweis: Es seien $f = g - h$ mit monoton wachsenden Funktionen g und h. Dann ist

$$\|f\|_{TV} \le \|g\|_{TV} + \|h\|_{TV} = g(b) - g(a) + h(b) - h(a) < \infty.$$

Umgekehrt sei $f \in BV([a,b])$. Wir definieren die monoton wachsende Funktion

$$g(x) = \|f\|_{BV([a,x])}.$$

Dann ist $h = g - f \in BV([a,b])$ und für $a \le x < y \le b$

$$h(y) - h(x) = g(y) - f(y) - g(x) + f(x) = \|f\|_{TV([x,y])} - (f(y) - f(x)) \ge 0$$

und damit ist h monoton wachsend.

Definition 2.2.6 (Riemann-Stieltjesintegral) *Es sei* $I = [a,b]$, $\|h\|_{TV} < \infty$ *und* $g \in C([a,b])$. *Das Riemann-Stieltjesintegral ist*

$$\int_a^b g dh = \lim_{Z\in\mathcal{Z},\delta(Z)\to 0} \sum_{i=1}^N g(x_j)(h(x_j) - h(x_{j-1})).$$

1. Das Integral ist wohldefiniert. Es genügt, dies für monoton wachsende Funktionen h zu zeigen. Sei Z eine Zerlegung. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^N \inf_{x_{j-1}\le t\le x_j} f(t)(g(x_j) - g(x_{j-1})) &\le \sum_{j=1}^N f(x_j)(g(x_j) - g(x_{j-1})) \\ &\le \sum_{j=1}^N \sup_{x_{j-1}\le t\le x_j} f(t)(g(x_j) - g(x_{j-1}))\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^N (\sup_{x_{j-1}\le t\le x_j} f(t) - \inf_{x_{j-1}\le t\le x_j} f(t))(g(x_j) - g(x_{j-1})) \\ \le \sup_{|x-y|\le\delta(Z)} |f(x) - f(y)| \|g\|_{TV}.\end{aligned}$$

Andererseits liegt die mittlere Summe auch für jede Verfeinerung des Intervalls zwischen diesen Grenzen. Daraus folgt die Konvergenz.

2. Ist $h(x) = x$, so erhalten wir das Riemannintegral. Es genügt, eine gleichförmige Unterteilung zu wählen.

3. Ist $g = 1$ so erhalten wir $h(b) - h(a)$.

4. Ist h differenzierbar, so gilt

$$\int_a^b g dh = \int_a^b g(x)h'(x)dx.$$

Dies folgt mit einer gleichförmigen Unterteilung des Intervalls.

5. Sind $\|g\|_{TV} < \infty$, $\|h\|_{TV} < \infty$, $g, h \in C([a,b])$ so folgt die partielle Integration

$$\int_a^b g dh + \int_a^b h dg = g(b)h(b) - g(a)h(a).$$

6. $$\int (f_1 + f_2) dg = \int f_1 dg + \int f_2 dg$$

7. $$\int f d(g_1 + g_2) = \int f dg_1 + \int f dg_2$$

8. Die Funktionen $x \to \int_a^x f dg$ sind immer rechtsseitig stetig.

Beispiele:

$$\int_0^{10} x de^{[x]} = (e-1) + 2(e^2 - e) + 3(e^3 - e^2) + \cdots + 10(e^1 0 - e^9)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) d\cos(x) = \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \pi$$

2.3 Resultate der Maß- und Integrationstheorie

Definition 2.3.1 (σ-Algebra) *Sei X eine Menge. Eine Teilmenge $\mathcal{A}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ heißt σ-Algebra, falls gilt*

1. $\{\} \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \implies X \backslash A \in \mathcal{A}$
3. $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2, \ldots \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$

Beispiele:

$$\{\}, X \subset X$$

$$\mathcal{P}(X)$$

Ist X ein metrischer Raum, so ist die Borel-σ-algebra die kleinste σ Algebra, die alle offenen Mengen enthält. Elemente von $\mathcal{A}$ heißen ($\mathcal{A}$) messbar.

2.3.1 Das Maß

Definition 2.3.2 *Es sei X eine Menge und $\mathcal{A}$ eine σ Algebra. Eine Abbildung*

$$\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

heißt Maß, falls

1. $\mu(\{0\}) = 0$
2. $A_i \in \mathcal{A}$ *paarweise disjunkt impliziert*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\bigcup A_i).$$

Beispiele: Das Lebesguemaß, das Hausdorffmaß.

Ein Menge vom Maß Null heißt Nullmenge. Wir sagen, eine Eigenschaft gilt fast überall, falls sie außerhalb einer Nullmenge gilt.

2.3.2 Das Lebesgueintegral

Zu einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ gehört ein Lebesgueintegral

$$\int f d\mu.$$

Genauer: Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R} \bigcup \{\pm\infty\}$ heißt $\mathcal{A}$-messbar, falls für alle $t \in \mathbb{R}$ die Mengen

$$\{x \in X | f(x) > t\}$$

$\mathcal{A}$ messbar sind.

Man definiert nun das Integral nichtnegativer messbarer Funktionen als eine Zahl in $[0, \infty) \bigcup \{\infty\}$, nennt eine messbare Funktion integrierbar, falls $\int |f| d\mu < \infty$, und definiert für integrierbare Funktionen das Integral

$$\int f d\mu = \int \max\{f, 0\} d\mu - \int \max\{-f, 0\} d\mu.$$

Für stetige Funktionen auf $\mathbb{R}$ und das Lebesguemaß stimmt dieses Integral mit dem Regelintegral und dem Riemannintegral überein.

2.3.3 Lebesguepunkte

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt Lebesguepunkt, falls für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ und ein $c \in \mathbb{R}$ existieren, so dass für jede Kugel $x \in B_r(y)$ mit $r \leq \delta$

$$\lambda^n(B_r(y))^{-1} \int_{B_r(y)} |f - c| d\lambda^n < \varepsilon.$$

Satz 2.3.3 *Das Komplement der Lebesguepunkte hat das Maß Null. Fast überall gilt*

$$\lim_{r \to 0} \lambda^n(B_r(x)) \int_{B_r(x)} f(y) d\lambda^n(y) = f(x).$$

2.3.4 Monotone Funktionen II

Satz 2.3.4 *Es sei g eine monoton wachsende rechtsseitig stetige Funktion. Dann definiert*

$$\mu((a, b]) = g(b) - g(a)$$

ein Maß auf den Borelmengen von $\mathbb{R}$. Für jede stetige Funktion f mit kompaktem Träger gilt

$$\int f d\mu = \int_a^b f dg.$$

Definition 2.3.5 *Wir schreiben $\mu = M'$. Besitzt μ eine Dichte bezüglich dem Lebesguemaß, d.h. falls sich μ in der Form $f d\lambda$ schreiben läßt, so identifizieren wir f, μ und M'.*

2.3.5 Absolutstetigkeit, der Satz von Radon-Nikodym

Definition 2.3.6 *Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(X, \mathcal{A}, \nu)$ Maßräume. Wir sagen, μ ist absolut stetig bezüglich ν ($\mu << \nu$) , falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit*

$$\nu(A) < \delta \Longrightarrow \mu(A) < \varepsilon.$$

μ heißt singulär bezüglich ν, falls eine messbare Menge $B \subset X$ existiert mit $\nu(B) = 0$ und $\mu(X \backslash B) = 0$.

Satz 2.3.7 (Radon-Nikodym) *Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(X, \mathcal{A}, \nu)$ σ endliche Maßräume mit $\mu << \nu$. Dann existiert eine nichtnegative ν integrierbare Funktion f mit*

$$\mu(A) = \int_A f d\nu.$$

Wir sagen, μ hat eine Dichte f bezüglich dem Maß ν und schreiben $\mu = f\nu$.

Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(X, \mathcal{A}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Dann können wir μ in der Form

$$\mu = \mu_c + \mu_S$$

zerlegen, wobei $\mu_c << \nu$ und μ_S singulär ist bezüglich ν.

Wir betrachten den Fall $X = [0, \infty)$, λ das Lebesguemaß und μ ein σ endliches Maß auf den Borelmengen. Es existieren höchstens endlich viele Punkte x_j mit $\mu(\{x_j\}) > 0$. Die zugehörigen Bestandteile des Maßes heißen Atome.

Wir definieren

$$\mu_d = \sum \mu(\{x_j\})\delta_{x_j},$$

wobei δ_y das Punktmaß in x ist. Wir können dann μ eindeutig in der Form

$$\mu = \mu_d + \mu_s + \mu_c \tag{2.3.1}$$

schreiben, wobei die Maße jeweils paarweise singulär sind, $\mu_c << \lambda$, μ_d ein atomares Maß, d.h. eine Summe von Punktmaßen und μ_s ein singulärer Anteil ohne Atome ist.

Entsprechend dieser Zerlegung können wir monotone rechtsseitig stetige Funktionen in der Form

$$h = h_c + h_d \tag{2.3.2}$$

zerlegen, wobei h_c monoton und stetig ist und h'_d eine Summe von Atomen ist:

$$h_c(x) = h(a) + \mu_c([a, x]) + \mu_s([a, x])$$

$$h_d(x) = \mu_d([a, x]),$$

wobei die rechte Seite die Summe über die Unstetigkeitsstellen von h multipliziert mit den Sprunghöhen ist.

Jede BV Funktion g kann als Summe einer stetigen BV Funktion g_c und einer BV Funktion g_d geschrieben werden, deren Ableitung Summe von Atomen ist. Wir erhalten

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f dg_d + \int_a^b f dg_c,$$

wobei das erste Integral eine Summe über die Unstetigkeitsstellen von g multipliziert mit den Sprunghöhen und den Funktionswerten von f ist. Das zweite Integral ist wie im Fall stetiger Funktionen definiert.

Definition 2.3.8 *Es seien $f, g \in BV([a,b])$. Wir definieren*

$$\int f(x-0)dg(x) = \int f dg_c + \sum_{x_j} f(x_j - 0)a_j,$$

wobei die Summe über die Unstetigkeitsstellen x_j läuft und a_j die Sprunghöhe von g in x_j ist.

Beispiele:

1. $f = g(x) = 0$ falls $x < 0$ und 1 falls $x \geq 0$.

$$\int_{-1}^{1} f dg = 1$$

und

$$\int_{-1}^{1} f(x-0)dg(x) = 0$$

2. f wie oben, $g(x) = 0$ falls $x < 0$ und $x+1$ falls $x \geq 0$. Dann ist

$$\int_{-1}^{1} f(x)dg(x) = 2$$

und

$$\int_{-1}^{1} f(x-0)dg(x) = 1$$

2.4 Die Zinsintensität

Definition 2.4.1 *Es sei K eine Kapitalfunktion, es gelte $K' << \lambda$ und $K' = k$ in dem Sinn des vorigen Abschnitts. Dann heißt*

$$\phi = k/K$$

die Zinsintensitätsfunktion der Kapitalfunktion K.

Unter den angegeben Voraussetzungen sind k und ϕ Elemente von Äquivalenzklassen (lokal) integrierbarer Funktionen. Es gilt

$$\phi = (\log K)'$$

$$K : t \to e^{\int_0^t \phi(s)ds} = e^{\log K'((0,t])}.$$

In Lebesguepunkten von ϕ gilt

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{K(t_0+\Delta)-K(t_0)}{\Delta K(t_0)} = \phi(t).$$

Für allgemeine Kapitalfunktionen definiert man die kumulative Zinsintensität

$$\Phi(t) = \int_0^t (K(\tau-0))^{-1} dK.$$

Umgekehrt bestimmt die kumulative Zinsintensität die Kapitalfunktion. Diese Funktion ist rechtsstetig.

Satz 2.4.2 *Sei $\Phi : [0,\infty)$ eine nichtnegative monoton wachsende rechtsstetige Funktion. Dann existiert genau eine Kapitalfunktion, die der Volterraschen Integralgleichung*

$$K(t) = 1 + \int_0^t K(\tau-0) d\phi(\tau)$$

genügt.

Beweis: Wir zerlegen $\Phi = \Phi_c + \Phi_d$ in monoton wachsende Funktionen, wobei die erste stetig ist und die zweite Funktion nur Sprünge aufweist. Dann setzen wir

$$K(t) = e^{\Phi_c(t)} \prod_{\tau\le t} (1+\Delta\Phi(\tau)).$$

2.5 Zeitrenten und ihre Barwerte

Definition 2.5.1 1. *Eine Zeitrente ist ein vertraglich fixiertes System von zeitdiskreten Zahlungen an einen Vertragspartner, bei dem Beträge und Zahlungszeitpunkte bei Vertragsschluß festliegen.*

2. *Bei vorschüssiger Zahlungsweise erfolgen alle Zahlungen am Beginn des jeweiligen Rentenintervalls, bei nachschüssiger Zahlungsweise zu Ende des Intervalls.*

3. *Der Barwert einer Zeitrente ist die Summe aller auf den Vertragsbeginn abgezinsten Zahlungen. Die Grundsymbole sind*

   $\ddot{a}$ *bei vorschüssiger Zahlungsweise*

   a *bei nachschüssiger Zahlungsweise*

   Der Endwert einer Zeitrente ist die Summe aller auf das Vertragsende aufgezinsten Zahlungen. Grundsymbol:

   $\ddot{s}$ *bei vorschüssiger Zahlungsweise*

   s *bei nachschüssiger Zahlungsweise.*

Im folgenden wird das Rentenintervall auf 1 Jahr festgelegt und die zusammengesetzte Verzinsung verwendet. Der Abzinsungsfaktor ist $v = K(1)^{-1}$, $d = 1 - v$, $i = (1 - v)/v$.

Lemma 2.5.2 *1. Der Barwert einer Zahlung vom Betrag 1 zu Beginn des ν-ten Vertragsjahres ist $v^{\nu-1}$.*

2. Barwerte und Endwerte n Jahre lang jährlich zahlbarer Zeitrenten:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{\nu=0}^{n-1} v^{\nu} = \frac{1 - v^n}{d} \tag{2.5.1}$$

$$a_{\overline{n}|} = \sum_{\nu=1}^{n} v^{\nu} = v\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i} \tag{2.5.2}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|} r^n = \frac{r^n - 1}{d} \tag{2.5.3}$$

$$s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} r^n = \frac{r^n - 1}{i} \tag{2.5.4}$$

3. Barwerte ewiger Zeitrenten

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|} = 1/d \tag{2.5.5}$$

4. Barwerte m Jahre aufgeschobener, n Jahre jährlich zahlbarer Zeitrenten

$$_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m \ddot{a}_{\overline{n}|} = v^{m-1}\frac{1 - v^n}{i} \tag{2.5.6}$$

$$_{m|}a_{\overline{n}|} = v^m a_{\overline{n}|} = v^m \frac{1 - v^n}{i} \tag{2.5.7}$$

Eigentlich sollte die Notation die Form

$$_{n}\ddot{a} \quad \text{statt } \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

und

$$_{m|n}\ddot{a} \quad \text{statt } {}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

verwendet werden.

Mit $\Delta = 1/k$ schreiben wir bei k-tel jährlicher zusammengesetzter Verzinsung

$$i^{(k)} := kI_{1/k} = k((1 + i)^{1/k} - 1)$$

$$d^{(k)} := kD_{1/k} = k(1 - (1 - d)^{1/k})$$

Lemma 2.5.3 *Seien $\ddot{B}$ (B) der Barwert einer jährlich vorschüssig (nachschüssig) zahlbaren Zeitrente und $\ddot{B}^{(k)}$ ($B^{(k)}$) der Barwert der k tel jährlichen vorschüssig (nachschüssig) zahlbaren Zeitrente mit denselben Jahresgesamtbeträgen. Dann gilt bei zusammengesetzter Verzinsung*

$$\ddot{B}^{(k)} = \frac{d}{d^{(k)}}\ddot{B}$$

und

$$B^{(k)} = \frac{i}{i^{(k)}}B$$

Beweis: Die k-tel jährliche vorschüssige Zahlung des Betrages 1 im ν-ten Vertragsjahr hat den Barwert

$$_{\nu-1}\ddot{a}^{(k)}_{\overline{1}|} = \frac{v^{\nu-1}}{k}\sum_{j=0}^{k-1} v^{j/k} = \frac{v^{\nu-1}}{k}\frac{1-v}{1-v^{1/k}} = v^{\nu-1}\frac{d}{d^{(k)}}.$$

Die Aussage folgt durch Summation über ν. Die zweite Aussage folgt analog.

Für Barwerte kontinuierlich fliessender Zeitrenten gilt bei der zusammengesetzten Verzinsung

$$\overline{B} = \lim_{k\to\infty} B^{(k)} = \frac{i}{\delta}B \tag{2.5.8}$$

wobei

$$\delta = \frac{d}{dt}r^t = \ln r$$

die Zinsintensität der kontinuierlichen zusammengesetzten Verzinsung ist.

2.5.1 Geometrisch wachsende Zeitrenten

Wir betrachten eine jährlich n mal vorschüssig zahlbare Zeitrente, die mit dem Betrag 1 beginnt und jährlich um q Prozent des Vorjahresbetrages steigt. Mit $j = q/100$ gilt für den Barwert

$$^{\%}(I_{\overline{n}|}\ddot{a})_{\overline{n}|} := \sum_{\nu=0}^{q-1}(1+j)^\nu v^\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1}\left(\frac{1+j}{1+i}\right)^\nu = \sum_{\nu=0}^{n-1}\tilde{v}^\nu$$

$$\tilde{v} := \frac{1}{1+\tilde{i}} \quad \tilde{i} = \frac{1+i}{1+j} - 1 \sim i - j$$

Also ist $^{\%}(I_{\overline{n}|}\ddot{a})_{\overline{n}|}$ der Barwert einer n Jahre jährlich vorschüssig zahlbaren Zeitrente zum Zinssatz $\tilde{i} > -1$. Es gilt $i < j \iff \tilde{i} < 0$. Normalerweise wird $\tilde{i} > 0$ gelten.

2.6 Bewertung allgemeiner Zahlungsströme

Definition 2.6.1 *Ein (deterministisch gerichteter) Zahlungsstrom ist eine monotone rechtsseitig stetige nichtnegative Funktion Z auf $[0,\infty)$. Sind Z_1 und Z_2 gerichtete Zahlungsströme und Z_1 oder Z_2 beschränkt, so ist $Z = Z_1 - Z_2$ ein (deterministischer) ungerichteter Zahlungsstrom. Sei $\mathcal{Z}$ die Menge aller Zahlungsströme und $\mathcal{Z}_g$ die Menge der gerichteten Zahlungsströme.*

1. $Z(t)$ wird als Zahlungsbilanz interpretiert.
2. Auf kompakten Intervall ist $Z \in \mathcal{Z}$ eine BV Funktion.
3. Jede Zahlungsfunktion kann in die Summe eines diskreten Anteils, eines stetigen singulären Anteils und eines absolutstetigen Anteils zerlegt werden.
4. Ist Z absolutstetig, so kann man die Zahlungsintensität

$$\psi = Z'/Z$$

einführen. Damit gilt

$$Z(t) = e^{\int_{t_0}^t \psi(\tau)d\tau} Z(t_0).$$

Die Definition der kumulativen Zinsintensität überträgt sich.

Definition 2.6.2 *Endwert und Barwert eines ungerichteten Zahlungsstroms Z bis zur Zeit t mit der Kapitalfunktion K und der Diskontierungsfunktion $v = 1/K$ werden durch*

$$s(Z)(t) := \frac{1}{v(t)} \int_0^t v(\tau)dZ(\tau)$$

und

$$a(Z)(t) := \int_0^t v(\tau)dZ(\tau)$$

gegeben. Der Barwert des gesamten Zahlungsstromes ist

$$a(Z) := a(Z)(\infty) = \int_0^\infty v(\tau)dZ(\tau).$$

Satz 2.6.3 *Für die Bewertung des Zahlungsstromes $Z \in \mathcal{Z}$ vermöge der Kapitalfunktion K mit der kumulativen Zinsintensität gilt*

$$\begin{aligned}\int_{(s,t]} v(\tau)dZ(\tau) &= v(t)Z(t) - v(s)Z(s) - \int_{(s,t]} Z(\tau-0)dv(\tau) \\ &= v(t)Z(t) - v(s)Z(s) + \int_{(s,t]} Z(\tau-0)v(\tau-0)v(\tau)dK(\tau) \\ &= v(t)Z(t) - v(s)Z(s) + \int_{(s,t]} Z(\tau-0)v(\tau)d\Phi.\end{aligned}$$

Definition 2.6.4 *Eine* Bewertung von Zahlungsströmen *ist eine Abbildung*

$$W : [0, \infty) \times \mathcal{Z} \to [-\infty, \infty]$$

die als Wert des gesamten Zahlungsstroms zur Zeit $t \geq 0$ *interpretiert wird. Eine Bewertung heißt regulär, falls*

Endlichkeit: $W(t, Z) \in \mathbb{R}, t \geq 0$ *falls* $Z \in \mathcal{Z}_g$ *mit* $\lim_{t\to\infty} Z(t) < \infty$

Sensitivität: $W(t, 1_{[u,\infty)}) \neq 0, t, u \geq 0.$

Additivität: $W(t, Z_1 + Z_2) = W(t, Z_1) + W(t, Z_2), t \geq 0, Z_1, Z_2, Z_1 + Z_2 \in \mathcal{Z}.$

Monotone Stetigkeit: *Falls* $Z = \sup Z_n$, $Z_n, Z \in \mathcal{Z}$ *impliziert* $W(t, Z) = \sup_n W(t, Z_n)$.

Unmittelbarkeit: $u \to W(t, 1_{[u,\infty)})$ *ist rechtsseitig stetig.*

Konsistenz: $W(t, Z) = W(t, W(u, Z)1_{[u,\infty)})$.

Die Konsistenzforderung besagt, dass man jeden deterministischen Zahlungsstrom Z ohne Wertänderung durch eine Einmalzahlung ersetzen kann.

Satz 2.6.5 *a) Sei* K *eine Kapitalfunktion. Dann definiert*

$$W(t, Z) = K(t)a(Z)$$

eine reguläre Bewertung von Zahlungsströmen.

b) Ist W *eine reguläre Bewertung von Zahlungsströmen, so existiert genau ein Kapitalfunktion wie in (a), die durch*

$$K(t) = W(t, 1_{[0,\infty)})$$

gegeben wird.

Definition 2.6.6 *Zwei deterministische ungerichtete Zahlungsströme* Z_1 Z_2 *heißen äquivalent unter der Kapitalfunktion* K*, wenn ihre vermöge* K *ermittelten Barwerte endlich sind und übereinstimmen.*

Definition 2.6.7 *Seien* K *eine Kapitalfunktion und* $Z = Z_1 - Z_2 \in \mathcal{Z}$ *ein Zahlungsstrom. Dann wird das prospektive Deckungskapital durch das (uneigentliche) Integral*

$${}_tV := K(t) \int_{[t,\infty)} K^{-1}(\tau) dZ(\tau)$$

definiert. Ist ${}_tV$ *stets nichtnegativ, so heißt* (Z, K) *ein Sparplan. Ist* ${}_tV$ *stets nichtpositiv, so spricht man von einem Kreditvertrag und* $-{}_tV$ *ist die Restschuld.*

Definition 2.6.8 *Das retrospektive Deckungskapital von* (Z, K) *zur Zeit* $t \geq 0$ *ist*

$${}^{(r)}_{t}\mathrm{V} := -K(t) \int_{[0,t)} K^{-1}(\tau) dZ(\tau).$$

Das retrospektive Deckungskapital ist der Endwert zur Zeit t der bis zu dieser Zeit aufgelaufenen Verpflichtungen.

Satz 2.6.9 *Seien K eine Kapitalfunktion und Z_1, Z_2 äquivalente deterministische gerichtete Zahlungsströme. Dann gilt*

$$ {}_{t}^{(r)}\mathrm{V} = {}_{t}\mathrm{V}\,. $$

Unterscheiden sich die Kapitalfunktionen oder sind die Ströme nicht äquivalent, so können sich das prospektive und das retrospektive Deckungskapital unterscheiden.

Kapitel 3

Ausscheideordnungen in der Lebensversicherung

In diesem Kapitel studieren wir die Modellierung und die Analyse des zugrunde liegenden biometrischen Risikos. Da wir stets eine deterministische Verzinsung zugrunde legen, kommt erst hier der Zufall ins Spiel.

3.1 Ein unter einem Risiko stehendes Leben

Seien $(X_x, \mathcal{A}_x, P_x)$ für $x > 0$ Wahrscheinlichkeitsräume, d.h. ein Maßraum mit $P(X) = 1$. Wir betrachten Zufallsvariablen $T_x : X_x \to [0, \infty)$, welche die Lebensdauer einer Kohorte mit Alter x angibt.

Wir beschreiben die Verteilung von T_x durch die Verteilungsfunktion

$$F_x(t) = P_x(T_x \leq t) =: {}_t\mathrm{q}_x \in [0, 1].$$

Die Beziehung zwischen der Verteilungsfunktion und dem Maß ist in folgendem Satz enthalten.

Satz 3.1.1 *Sei μ ein Maß auf $[0, \infty)$ und $h(x) = \mu([0, x])$. Dann ist h monoton und rechtsseitig stetig. Umgekehrt definiert eine monotone und rechtsseitig stetige Funktion ein Maß auf $[0, \infty)$.*

Ohne Beweis, siehe Vorlesung Stochastik.

Die Verteilung können wir auch durch ihre Überlebensfunktion

$$S_x(t) := 1 - F_x(t) = P(T_x > t) =: {}_t\mathrm{p}_x \in [0, 1]$$

oder durch die kumulative Ausscheideintensität

$$\Lambda_x(t) = \int_0^t (1 - F_x(. - 0))^{-1} dF_x \tag{3.1.1}$$

mit der Relation

$$F_x(t) = \int_0^t (1 - F_x(. - 0))d\Lambda_x + F_x(0) \tag{3.1.2}$$

beschreiben, solange $F_x(t) < 1$.

Satz 3.1.2 *Es sei $\Lambda : [0, \omega) \to [0, \infty]$ eine monoton wachsende rechtsseitig stetige Funktion mit Sprüngen maximal der Größe* 1*. Dann besitzt die Volterra-Integralgleichung*

$$S(t) = 1 - \int_0^t S(\tau - 0)d\Lambda$$

genau eine Lösung $S(t)$, die auf kompakten Intervallen endliche Totalvariation besitzt.

Wir bezeichen die Verteilung von T_x mit $\mathcal{L}(T_x, P_x)$. Diese Verteilung ist das zu F_x gehörige Wahrscheinlichkeitsmaß.

Wir definieren das rechnerische Höchstalter für T_x

$$\omega_x = x + \inf\{\hat{\omega} : F_x(\hat{\omega}) = 1\}.$$

Die folgende fundamentale Stationaritätsannahme

$$P_{x+s}(T_{x+s} > t) = P_x(T_x > s + t | T_x > s) \tag{3.1.3}$$

werden wir immer zugrunde legen.

Ein System $\mathcal{L}(T_x|P_x)$ heißt einfache Ausscheideordnung, falls die Stationaritätsannahme (3.1.3) erfüllt ist. Diese Annahme schließt Effekte aus, die durch Veränderung der Kohorte entstehen können. Wir werden die Stationaritätsannahme immer zugrunde legen, und im anderen Fall explizit darauf hinweisen.

Konkreter werden wir immer die Stationaritätsannahme folgendermaßen verschärfen: $(X, \mathcal{A}, P)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum, $T : X \to [0, \infty)$ die Lebensdauer.

Sei $X_x = \{\alpha : T(\alpha) > x\}$ das Ereignis, dass die Lebensdauer größer als x ist. Falls $P(X_x) > 0$ ist, definieren wir das Maß P_x auf X_x durch

$$P_x(A) = P(A)/P(X_x)$$

für messbare Ereignisse in X_x und

$$T_x(\alpha) = T(\alpha) - x$$

auf X_x.

Es gibt ein erstes $\omega \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$ mit $F(\omega) = 1$. Zu diesem Zeitpunkt ist die gesamte Kohorte fast sicher gestorben. Der Fall $x \geq \omega$ ist problematisch, da dann $P(\{T > x\}) = 0$. In diesem Fall nehmen wir an, dass $X_x = \{T > x\}$ nicht die Nullmenge ist, nehmen $\mathcal{A}_x = \{\{\}, X_x\}$ und $T_x(\alpha) = 0$.

Damit erhalten wir

$$P_x(T_x > 0) = 1 \qquad \text{genau dann, wenn } x < \omega$$

und es folgt

$$_{s+t}\mathrm{p}_x = P(T_x > s+t) = P(T_x > s)P(T_x > s+t|T_x > s) = {}_s\mathrm{p}_x \; {}_t\mathrm{p}_{x+s}$$

$$_{s+t}\mathrm{q}_x - {}_s\mathrm{q}_x = {}_s\mathrm{p}_x \; {}_t\mathrm{q}_{x+s}\,.$$

Damit folgt

$$\omega = x + \omega_x \qquad \text{falls } x \leq \omega$$

und

$$\omega_x = x \qquad \text{falls } x > \omega.$$

Lemma 3.1.3 *Es seien $F : [0, \infty) \to [0, 1]$ eine monoton wachsende rechtsseitig stetige Funktion mit kumulativer Ausscheideintensität Λ. Sei ω der erste Zeitpunkt mit $F(\omega) = 1$. Dann können folgende Fälle auftreten:*

1. *$\omega = \infty$, $\Lambda([0, \infty)) \subset [0, \infty), \lim_{t\to\infty} \Lambda(t) = \infty$.*
2. *$\omega < \infty$, F stetig in ω, $\Lambda(\omega) = \infty$, $\lim_{x\to\omega^-} \Lambda(x) = \infty$.*
3. *$\omega < \infty$, F springt an ω, $\Lambda(\omega) < \infty$, Λ springt an ω um 1.*

Es sei $\mathcal{L}(T_x, P_x) << \lambda^1$ und f_x die Dichte nach dem Satz von Radon-Nikodym. Dann folgt

$$\int_s^t f_x(\tau)d\tau = F_x(t) - F_x(s) = P_x(s < T_x \leq t) =: {}_{s|t-s}\mathrm{q}_x\,.$$

Die Ausscheideintensität ist

$$\lambda_x = f_x/S_X \qquad (0/0 = 0)$$

und es gilt für $t \geq 0$

$$S_x(t) = e^{-\int_0^t \lambda_x(\tau)d\tau} = e^{-\Lambda_x(t)}.$$

Wir erhalten eine Reihe wichtiger Größen:

1. ω_x ist das rechnerische Höchstalter von (x).
2. $\mathrm{med}(T_x) := F_x^{-1/2}(1/2)$ ist, sofern es eindeutig ist, die (vollständige) mittlere Restlebensdauer von (x),
3. $$\dot{e}_x = E(T_x) = \int_0^\infty S_x(t)dt = \int_0^\infty {}_t\mathrm{p}_x\,dt \tag{3.1.4}$$
   die vollständige Restlebenserwartung, und falls $\dot{e}_x < \infty$
   $$\mathrm{Var}(T_x) = E(T_x)^2 - E(T_x^2) = \int_0^\infty S_x(\sqrt{t}) - \dot{e}_x^2. \tag{3.1.5}$$

3.2 Mehrere unter einem Risiko stehende Leben

Wir betrachten mehrere unter einem Risiko stehende Leben, die durch stochastisch unabhängige Lebensdauern

$$T_{x_1}, T_{x_2} \dots T_{x_m}$$

beschrieben werden, wobei die Notation nicht ganz korrekt ist. Meistens ist $m = 2$. In diesem Fall ist die Annahme der Unabhängigkeit problematisch.

3.2.1 Gruppen, die beim ersten Aussscheiden erlöschen.

Die zukünftige gemeinsame Lebensdauer ist

$$T_{x_1 \dots x_m} := \min\{T_{x_1}, \dots T_{x_m}\}.$$

Die t-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit ist

$${}_t\mathrm{p}_{x_1 \dots x_m} := P(T_{x_1 \dots x_m} > t) = \prod_{i=1}^{m} P(T_{x_i} > t) = \prod_{i=1}^{m} {}_t\mathrm{p}_{x_i},$$

und die t jährige Aussscheidewahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} {}_t\mathrm{q}_{x_1 \dots x_m} :=& F_{x_1 \dots x_m} \\ =& 1 - {}_t\mathrm{p}_{x_1 \dots x_m} \\ =& 1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - {}_t\mathrm{q}_{x_i}) \\ =& \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le m} F_{x_{i_1}}(t) \dots F_{x_{i_k}}(t) \end{aligned}$$

Die kumulative Ausscheideintensität ist durch

$$\Lambda_{x_1, \dots x_m} := \int_0^t \frac{1}{1 - F_{x_1 \dots x_m}(-0)} dF_{x_1 \dots x_m}$$

gegeben.

Satz 3.2.1 *Sei ω der erste Zeitpunkt zu dem ein $F_{x_j}(\omega) = 1$. Falls $F_{x_1} \dots F_{x_m}$ keine gemeinsamen Sprungstellen in $[0, \omega]$ besitzen, so ist*

$$\Lambda_{x_1 \dots x_m} = \sum_{i=1}^{m} \Lambda_{x_i} \text{ auf } [0, \omega]. \tag{3.2.1}$$

Insbesondere gilt, falls die Verteilungen von T_{x_i} eine Dichte f_i bezüglich dem Lebesguemaß besitzen,

$$\lambda_{x_1, \dots, x_m} := \frac{f_{x_1, \dots, x_m}(t)}{1 - F_{x_1 \dots x_m}(t)} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{x_i}(t)$$

fast überall in $[0, \omega]$.

3.2.2 Gruppen, deren Bestand nur von der Anzahl der lebenden Mitglieder abhängt

Sei

$$T_{\frac{l}{x_1\cdots x_m}} := T_{m-l+1:x_m} \tag{3.2.2}$$

die Überlebenszeit für mindestens l der m Individuen, die wir auch die $(m-l+1)$ *te Ordnungsstatistik der zukünftigen Lebensdauern* nennen.

$$T_{\frac{m}{x_1\cdots x_m}} = T_{x_1\ldots x_m} \qquad T_{\frac{}{x_1\cdots x_m}} = T_{\frac{1}{x_1\cdots x_m}} = \max_{1\le i\le m} T_{x_i} \tag{3.2.3}$$

und

$${}_t\mathrm{p}^{\frac{l}{x_1\cdots x_m}} := P(T_{\frac{l}{x_1\cdots x_m}} > t) \tag{3.2.4}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens l Individuen überleben sowie

$${}_t\mathrm{p}^{\frac{[l]}{x_1\cdots x_m}} := P(T_{\frac{l}{x_1\cdots x_m}} > t) \tag{3.2.5}$$

die Wahrscheinlichkeit, daß genau l überleben.

Lemma 3.2.2 (Schuette-Nesbitt-Formel) . *Seien $m \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{A}$, $1 \le i \le m$,*

$$N(\omega) = \#\{i : \omega \in A_i\}$$

$$C = \sum_{i=0}^{m} c_i 1_{\{N=i\}}$$

für $(c_0, \ldots c_m)^T \in \mathbb{R}^{m+1}$. Dann folgt

$$E(C) = \sum_{k=0}^{m} (\Delta^k c)_0 S_k,$$

wobei

$$S_0 = 1, S_k = \sum_{1\le i_1 < \cdots < i_k \le m} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \qquad 1 \le k \le m$$

und

$$\Delta : \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbb{R}^{m+1} \to \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbb{R}^m$$

$$\Delta(c_j)_{1\le j\le m} = (c_1 - c_0, \ldots, c_m - c_{m-1}).$$

Wir setzen $A_i = \{T_{x_i} > t\}$ und erhalten

$${}_t\mathrm{S}_k := S_k = \sum_{1\le i_1 < i_2 \cdots < i_k \le m} {}_t\mathrm{p}_{x_{i_1}} \cdots {}_t\mathrm{p}_{x_{i_k}}$$

sowie

$$
\begin{aligned}
{}_t\mathrm{p}_{\frac{[l]}{x_1\ldots x_m}} &:= P(T_{\frac{l}{x_1\ldots x_m}} > t, T_{\frac{l+1}{x_1\ldots x_m}} \leq t) \\
&= \sum_{k=0}^{m-l} (-1)^k \binom{k+l}{l} {}_t\mathrm{S}_{k+l},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_t\mathrm{p}_{\frac{l}{x_1\ldots x_m}} &:= P(T_{\frac{l}{x_1\ldots x_m}} > t) \\
&= \sum_{k=0}^{m-l} (-1)^k \binom{k+l-1}{k} {}_t\mathrm{S}_{k+l}\,.
\end{aligned}
$$

3.3 Ein unter konkurrierenden Risiken stehendes Leben

In diesem Abschnitt betrachten wir Personengesamtheiten, die aufgrund verschiedener Ursachen $j \in \{1, \ldots, m\}$ abnehmen, wie

(a) Kollektiv Berufstätiger

- $j = 1$ Ausscheiden durch Invalidisierung
- $j = 2$ Ausscheiden durch Tod als aktive Person
- $j = 3$ Ausscheiden durch Pensionierung
- $j = 4$ Ausscheiden durch Austritt (Stornierung)

(b) Kollektiv Lebender

- $j = 1$ Ausscheiden durch Unfalltod
- $j = 2$ Ausscheiden aus anderen Ursachen

(c) Kollektiv ohne Pockenerkrankung

- $j = 1$ Ausscheiden durch Pockenerkrankung
- $j = 2$ Ausscheiden durch Tod ohne vorherige Pockenerkrankung.

Wir definieren T_x als die zukünftige Verweildauer, $U = \{1, \ldots m\}$ und $\{\} \neq J_x \subset U$ als die zutreffende Kombination von Ausscheideursachen.

Die gemeinsame Verteilung $\mathcal{L}(T_x, J_x)$ ist gegeben durch die partiellen Verteilungsfunktionen

$$F_{x,C}(t) := P(T_x \leq t; J_x = C), \tag{3.3.1}$$

die (abhängigen) partiellen Ausscheidewahrscheinlichkeiten

$${}_t\mathrm{q}_x^{(C)} := F_{x,C}(t) \tag{3.3.2}$$

und die (abhängigen) partiellen Verbleibwahrscheinlichkeiten

$${}_t\mathrm{p}_x^{(C)} := 1 - F_{x,C}(t). \tag{3.3.3}$$

Die zu (T_x, J_x) gehörige Lebensdauerverteilung ist

$$F_x := \sum_{\{\} \neq C \subset U} F_{x,C}$$

mit der totalen t-jährigen Ausscheidewahrscheinlichkeit

$${}_t\mathrm{q}_x := F_x(t)$$

und der t jährigen Verbleibwahrscheinlichkeit

$${}_t\mathrm{p}_x = 1 - {}_t\mathrm{q}_x\,.$$

Die kumulative partielle Ausscheideintensität für $\{\} \neq C \subset U$ ist

$$\Lambda_{x,C}(t) = \int_0^t \frac{1}{1 - F_x(. - 0)} dF_{x,C} \tag{3.3.4}$$

und die kumulative totale Ausscheideintensität ist

$$\Lambda_x = \sum_{\{\} \neq C \subset U} \Lambda_{x,C}. \tag{3.3.5}$$

Wir erhalten die Beziehungen

$$F_{x,C}(t) = \int_0^t (1 - F_x(. - 0)) d\Lambda_{x,C}.$$

Ist die Verteilung von T_x absolutstetig bezüglich dem Lebesguemaß, so erhalten wir die Dichten f_x, $f_{x,C}$, die Ausscheideintensitäten λ_x und $\lambda_{x,C}$.

3.3.1 Das Beispiel verbundener Leben

Sei $(x) = (x_1 \dots x_m)$ eine Gruppe von Personen mit stochastisch unabhängigen zukünftigen Lebensdauern $T_{x_1}, \dots T_{x_m}$, die beim ersten Ausscheiden erlischt. Wir definieren

$$T_x = T_{x_1, \dots x_m}$$

$$U = \{1, \dots m\}$$

$$\begin{aligned} J_x =& \{j_1, \dots j_k\} \Longleftrightarrow \\ T_x =& T_{x_{j_1}} = T_{x_{j_2}} = \dots = T_{x_{j_k}} < \min_{j \notin \{j_1, \dots j_k\}} T_{x_j}. \end{aligned}$$

Ist fast sicher $T_{x_i} \neq T_{x_j}$, so genügt es, Mengen C mit einem Element zu betrachten.

Wir verfolgen nun das Ziel, die einzelnen Ausscheideursachen getrennt zu betrachten.

Definition 3.3.1 *Eine Darstellung eines Ausscheidemodells $\mathcal{L}(T_x, J_x)$ mittels unabhängiger latenter Ausfallzeiten ist ein System stochastisch unabhängiger $[0, \infty]$ wertiger Zufallsvariablen T_C, $\{\} \neq C \subset U$, wobei für jede Kombination C von Ausscheideursachen T_C die alleinige Wirkung dieser Kombination innerhalb der Lebensspanne beschreibt:*

$$\Lambda_{T_C}(t) = \Lambda_{x,C}(t).$$

Satz 3.3.2 (Satz von Karup-Loewy) *Sei $\mathcal{L}(T_x, J_x)$ ein Ausscheidemodell mit m Ausscheideursachen, rechnerischem Höchstalter ω_x und Lebensspanne $\mathcal{L}_x$. Dann gilt*

1. *Es existiert eine Darstellung von $\mathcal{L}(T_x, J_x)$ mittels unabhängiger latenter Ausfallzeiten T_C.*

2. *Die Verteilungsfunktion F_{T_C} ist auf $\mathcal{L}_x$ eindeutig bestimmt durch die Integralgleichung*
$$F_{T_C}(t) = \int_0^t F_{T_C}(\tau - 0) d\Lambda_{x,C}(\tau)$$

3. *Besitzen die partiellen Verteilungsfunktionen $F_{x,C}$ keine gemeinsamen Sprungstellen auf $\mathcal{L}_x$ und ist $T := \min\{T_C\}$ die zukünftige Verweildauer der verbundenen Leben, so liegen keine Bindungen vor.*

4. *Ist $\omega_x = \infty$ und $\Lambda_{x,C}(\infty) = \infty$, so kann die latente Ausfallzeit T_C endlich gewählt werden. Ist $\omega_x < \infty$, so können alle latenten Ausfallzeiten endlich gewählt werden.*

5. *Hat $\mathcal{L}(T_x)$ eine Dichte bezüglich dem Lebesguemaß, so können die Zufallsvariablen T_C mit Dichten bezüglich dem Lebesguemaß gewählt werden. In diesem Fall heißt T_C eine dominierte Darstellung mittels unabhängiger Ausfallzeiten. Für die Ausscheideintensitäten gilt*
$$\lambda_{T_C} = \lambda_{x,C} \text{ fast überall.}$$

Definition 3.3.3 *Es seien $\mathcal{L}(T_x, J_x)$ ein Ausscheidemodell mit mehreren Ausscheideursachen und $(T_C)_{\{\} \neq C \subset U}$ eine Darstellung mittels unabhängiger latenter Ausfallzeiten. Dann heißen die Wahrscheinlichkeiten*

$${}^{u}_{t}\mathrm{p}_x^{(C)} := 1 - {}^{u}_{t}\mathrm{q}_x^{(C)} := P(T_C > t) \tag{3.3.6}$$

unabhängige partielle Verbleibs- bzw Ausscheidewahrscheinlichkeiten.

Im Gegensatz dazu sind die Größen

$${}_{t}\mathrm{q}_x^{(C)} = \int_0^t (1 - F_x(. - 0)) d\Lambda_{x,C}$$

im Allgemeinen nicht unabhängig. Es gilt

$$ {}_t\mathrm{q}_x = \sum_{\{\}\neq C\subset U} {}_t\mathrm{q}_x^{(C)} $$

und, falls keine gemeinsamen Sprungstellen vorliegen

$$ {}_t\mathrm{p}_x = \prod_{\{\}\neq C\subset U} {}_t^u\mathrm{p}_x^{(C)} . $$

Sind die Ausscheideursachen identifizierbar, so können wir sie durchnummerieren und die Wahrscheinlichkeiten in der Form

$$ {}_t\mathrm{p}_x^{(j)} \qquad \text{bzw} \qquad {}_t^u\mathrm{p}_x^{(j)} $$

schreiben. Die Ersteren werden abhängige und die Zweiten unabhängige Wahrscheinlichkeiten genannt.

Um statistische Verfahren zur Schätzung der Wahrscheinlichkeiten verwenden zu können, führen wir die Zensierung ein.

Definition 3.3.4 *Seien $X_1 \dots X_n$, $Y_1 \dots Y_n$ unabhängige Zufallsvariablen, wobei die X_j gemäß der Verteilungsfunktion F und G gemäß der Verteilungsfunktion G verteilt seien. Man betrachtet X_j als Überlebenswahrscheinlichkeiten und Y_j als Zensierung und beobachtet die Verweilzeiten und die Zensierungsindikatoren δ_i*

$$ Z_j = \min\{X_j, Y_j\} \qquad \delta_i := 1_{X_i \leq Y_i}. $$

Die Verteilungsfunktion F der Überlebenswahrscheinlichkeiten kann man mit dem Kaplan-Meier-Schätzer *gemäß*

$$ 1 - \hat{F}_n(t) := \prod_{Z_{i:n}\leq t} \left(1 - \frac{\delta_{i:n}}{n-i+1}\right) \tag{3.3.7} $$

schätzen, wobei $Z_{1:n} \leq Z_{2:n} \dots Z_{n:n}$ die Ordnungsstatistiken und $\delta_{1:n} \leq \delta_{2:n} \dots \delta_{n:n}$ die entsprechend umgeordneten Zensierungsindikatoren sind.

Sind $X_1 \dots X_n$ gegeben, so definieren wir die empirische Verteilungsfunktion

$$ F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{X_i\leq t} $$

mit der durch

$$ 1 - \Delta\Lambda_n(t) = \frac{1 - F_n(t)}{1 - F_n(t-0)} $$

bestimmten kumulativen Ausscheideintensität. Ohne Zensierung folgt

$$ \hat{F}_n(t) = 1 - \prod_{X_{i:n}\leq t} \frac{n-i}{n-i+1} = \prod_{\tau\leq t}(1 - \Delta_n(\tau)) = F_n(t). $$

Bei Zensierung läßt der Kaplan-Meier-Schätzer die zensierten Werte aus.

Sei jetzt $\mathcal{L}(T_x, J_x)$ ein Modell mit m Ausscheideursachen mit $F_{T_B}(t) \to \infty$ $(t \to \infty)$. Wir machen n unabhängige Beobachtungen (T_{x_j}, J_{x_j}) und suchen F_{T_B} und ${}^{u}_{t}\mathrm{q}_x^{(B)}$. Wir nehmen an, dass keine Bindungen, d.h. gemeinsame Sprungstellen existierten. Es seien $(T_{Ci})_{1 \le i \le n}$ eine Darstellung mittels unabhängiger latenter Ausfallzeiten und

$$X_i := T_{Bi}, \qquad Y_i := \min\{T_{Ci} : \{\} \neq C \subset U, C \neq B\}$$

$$Z_i := \min\{X_i, Y_i\} = \min T_{Ci}$$

und

$$\delta_i := 1_{\{X_i \le Y_i\}} = 1_{\{Z_i = X_i\}}.$$

Das ist ein Modell mit zufälliger Rechtszensierung. Beobachtbar sind

$$Z_i^* = T_{xi}, \quad \delta_i^* := 1_{J_{xi}=B}.$$

Nach dem Satz von Karup und Loewy ist aber

$$\mathcal{L}(Z_1^*, \delta^*, \dots Z_n^*, \delta_n^*) = \mathcal{L}(Z_1, \delta_1, \dots Z_n, \delta_n)$$

und wir erhalten mittels des Kaplan-Meier Schätzers eine Schätzung von F_n.

Genauer: Seien $0 = t_0 < \dots t_k$, $F(t_k) = 1$,

$$D_h := \sum_{i=1}^{n} 1_{\{t_{h-1} < Z_i \le t_h, \delta_i = 1\}} \tag{3.3.8}$$

die Anzahl der Verstorbenen,

$$W_h := \sum_{i=1}^{n} 1_{\{t_{h-1} < Z_i \le t_h, \delta_i = 0\}} \tag{3.3.9}$$

die Anzahl der durch Zensierung Ausgeschiedenen und

$$N_h := n - \sum_{i=1}^{n} (D_i + W_i) \tag{3.3.10}$$

die Anzahl der noch unter Risiko stehenden. Geschätzt werden sollen die nichtbedingten Sterbenswahrscheinlichkeiten

$$\pi_h = F(t_h) - T(t_{h-1}),$$

die wir positiv annehmen. Mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$\pi_h = P(X_1 > t_h | X_1 > t_{h-1}) = 1 - q_h,$$

gelten wegen der Produktformel

$$\pi_h = p_1 \dots p_{h-1} q_h$$

und

$$q_h = \frac{\pi_h}{1 - \sum_{i=1}^{h-1} \pi_i},$$

weswegen die Schätzung von (π_h) und q_h äquivalent ist.

Sind die Verweildauern und die Zensierungsindikatoren verfügbar, so bietet sich die Schätzung mit dem Kaplan-Meier-Schätzer an:

$$\hat{\pi}_h := \hat{F}_n(t_h) - \hat{F}_n(t_{h-1}).$$

Diese stehen aber oft nicht zur Verfügung, sondern nur D_h, N_h und W_h oder sogar nur D_h und W_h.

Ohne W_h bietet sich

$$\tilde{q}_h := D_h/N_h$$

bzw. 1 falls $N_h = 0$ an. Dies unterschätzt die q_h. Der Standard-Sterbetafelschätzer ist

$$\check{q}_h := D_h/(N_h - W_h/2)$$

bzw. 1 falls $N_h - W_h/2$.

In der vorhergehenden Situation schätzen wir die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten mit

$$D_1^* := \sum_{i=1}^{n} 1_{\{0<Z_i^* \leq t_1, \delta_i^*=1\}}$$

und

$$W_1^* := \sum_{i=1}^{n} 1_{\{0<Z_i^* \leq t_1, \delta_i^*=0\}}$$

durch den Standardschätzer

$$\check{q}_1^* := \frac{D_1^*}{n - W_1^*/2}.$$

Diskretisierungsfehler!

Oft: Keine gemeinsame Beobachtung von Ausscheidezeit und Ausscheideursachen.

Dann: Kein kombiniertes Modell, statistische Tests.

Die Stationaritätbedingung hat die Form

$$P(T_{x+s} > t, J_{x+s} = C) = P(T_x > s + t, J_x = C | T_x > s). \tag{3.3.11}$$

3.4 Sterbegesetze für die Gesamtbevölkerung

Es gibt einige Vorschläge für deterministische Sterbegesetze, die jedoch den Anforderungen der Lebenversicherungen nicht genügen.

1. *De Moivre 1725* Maximalalter $\omega_0 = 86$, gleichverteilte Lebensdauer auf $(0, \omega_0 - x)$. Daraus folgt

$$ {}_t\mathrm{p}_x = P(T_x > t) = \frac{\omega_0 - x - t}{\omega_0 - x} $$

$$ \Lambda_x(t) = -\log {}_t\mathrm{p}_x = \log(\omega_0 - x) - \log(\omega_0 - x - t) $$

$$ \lambda_x(t) = \frac{1}{\omega - 0 - x - t} $$

2. *Gompertz 1825*

$$ \frac{d}{ds}\lambda_0(s) = c\lambda_0(s) $$

$$ \lambda_0(s) = Bc^s. $$

   Unter der Stationaritätsannahme folgt

$$ \lambda_x(t) = Bc^{x+t} $$

$$ \Lambda_x(t) = \begin{cases} \frac{B}{\log c}(c^{x+t} - c^x) & c \neq 1 \\ Bt & c = 1 \end{cases} $$

$$ {}_t\mathrm{p}_x = \begin{cases} \exp\left(\frac{B}{\log c}(c^x - c^{x+t})\right) & c \neq 1 \\ \exp(-Bt) & c = 1. \end{cases} $$

3. *Makeham*

$$ \lambda_x(t) = A + Bc^{x+t} $$

$$ \Lambda_x(t) = At + \frac{B}{\log c}(c^{x+t} - c^x) $$

$$ {}_t\mathrm{p}_x = \exp(-At + \frac{B}{\log c}(c^x - c^{x+t})). $$

   Die Lebensdauerverteilung heißt Gompertz-Makeham Gesetz.

4. Weibull (1939)

$$ \lambda_0(s) = \frac{c}{\alpha^c} s^{c-1} $$

$$ \Lambda_0(s) = \frac{s^c}{\alpha^c} $$

$$ F_0(s) = 1 - \exp -(s/\alpha)^c. $$

   Unter der Stationaritätsannahme folgt

$$ \lambda_x = \frac{c}{\alpha^c}(x + t)^{c-1}. $$

5. *Gumbelverteilungen*

$$P(X \leq x) = \exp(-e^{-c(x-m)})$$

mit der Dichte

$$c \exp(-c(c-m) - e^{-c(x-m)}).$$

Es gilt

$$T \quad \text{Weibull } (\alpha, c) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{-} \log T \quad \text{Gumbel } (-\log \alpha, c).$$

6. *Gammaverteilungen*

$$T \quad \Gamma(a, b) \text{ verteilt} \qquad \Longleftrightarrow P(T \leq t) = \frac{1}{a^b \Gamma(b)} \int_0^t s^{b-1} e^{-s/a} ds.$$

3.5 Diskretisierung: Ganzzahlig gestutzte zukünftige Verweildauer

Definition 3.5.1 *Es seien*

$$K_x(t) := [T_x - 0] = \sum_{k=0}^{\infty} k 1_{\{k < T_x \leq k+1\}}, \tag{3.5.1}$$

die ganzzahlig gestutzte zukünftige Verweildauer von (x) *und*

$$R_x := T_x - K_x, \tag{3.5.2}$$

der in der Personengesamtheit erlebte Bruchteil des Ausscheidejahres von (x).

Satz 3.5.2 *Die Modelle* $\mathcal{L}(T_x, J_x)$ *und* $\mathcal{L}(K_x, R_x, J_x)$ *sind äquivalent.*

Es sei $q_{x+i}^{(C)}$ die einjährige abhängige partielle Ausscheidewahrscheinlichkeit und es gelte die Stationaritätsannahme. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} P(K_x = k, J_x = C) &= P(k < T \leq k+1, J_x = C) \\ &= {}_k\mathrm{p}_x \, q_{x+k}^{(C)} \\ &= \prod_{i=1}^{k} (1 - \sum_{\{\} \neq B \subset U} q_{x+i-1}^{(B)}) q_{x+k}^{(C)} \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

$$x \in [0, \omega_0), k \geq 0.$$

Die ganzzahlig gestutzte Restlebenserwartung ist

$$e_x := E(K_x) = \sum_{k=1}^{\infty} k P(K_x = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \prod_{i=1}^{k} (1 - q_{x+i-1}) q_{x+k}. \tag{3.5.4}$$

Satz 3.5.3 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

1. R_x *und* (K_x, J_x) *sind stochastisch unabhängig und* R_x *ist gleichmäßig verteilt.*

2. ${}_{k+r}\mathrm{q}_x^{(C)} = {}_k\mathrm{q}_x^{(C)} + r({}_{k+1}\mathrm{q}_x^{(C)} - {}_k\mathrm{q}_x^{(C)})$ *wobei* $0 \leq r \leq 1$.

Mit der linearen Interpolationsformel erhält man die Näherung

$$ {}^u\mathrm{q}_x^{(C)} \sim q_x^{(j)}(1 + \frac{1}{2} \sum_{i=1, i\neq j}^{m} q_x^{(i)}). $$

Satz 3.5.4 *Seien* T_x *und* T_y *unabhängige Familien zukünftiger Lebensdauern, die die Stationaritätsannahme erfüllen und für die die ganzzahlig gestutzten Lebensdauern und der erlebte Teil des Todesjahres stochastisch unabhängig sind, letztere seien gleichmäßig verteilt. Dann ist*

$$ P(k-1 < T_x \leq k, T_x < T_y) = {}_{k-1}\mathrm{p}_x \; {}_{k-1}\mathrm{p}_y \; q_{x+k-1} \frac{1 + p_{y+k-1}}{2}. \tag{3.5.5} $$

Beweis: Wir berechnen

$$ \begin{aligned} P(k-1 < T_x \leq k, T_x < T_y) =& P(K_x = k-1, K_y \geq k) \\ &+ P(K_x = k-1, K_y = k-1, R_x < R_y) \\ =& P(K_x = k-1)(P(K_y \geq k) \\ &+ P(K_y = k-1)P(R_x < R_y)) \\ =& {}_{k-1}\mathrm{p}_x \, q_{x+k-1}({}_k\mathrm{p}_y + \frac{1}{2} {}_{k-1}\mathrm{p}_y \, q_{y+k-1}) \\ =& {}_{k-1}\mathrm{p}_x \; {}_{k-1}\mathrm{p}_y \, q_{x+k-1}(p_{y+k-1} + \frac{1}{2} q_{y+k-1}) \\ =& {}_{k-1}\mathrm{p}_x \; {}_{k-1}\mathrm{p}_y \, q_{x+k-1} \frac{1 + p_{y+k-1}}{2}. \end{aligned} $$

Satz 3.5.5 *Unter der Stationaritätsannahme sind die Massen der kumulativen Ausscheideintensität* Λ_{K_x} *von* K_x *durch die einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten gegeben:*

$$ \Delta\Lambda_{K_x}(k) = q_{x+k}. $$

3.6 Ausscheidewahrscheinlichkeiten als Rechnungsgrundlage. Sterbetafeln

Für die Verwendung in den Personenversicherungen muß man die Verteilungen der zukünftigen Verweildauern und Ausscheideursachen approximieren. Durch Diskretisierung wird das Problem reduziert auf die Schätzung und Vertafelung von (un)abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten zu ganzzahligen Zeitpunkten. In diesem Abschnitt werden wir die Erstellung solcher Ausscheidetafeln grob diskutieren.

Wir interessieren uns für eine Personengesamtheit, welche auf Grund der Ausscheideursachen Tod sowie weiterer Ursachen (Emigration) abnehmen können, die hier nicht interessiert und zu einer Zensierung zusammengefasst werden. Zusätzlich ist eine Immigration möglich. Es seien die Sterblichkeit beeinflussende qualitative oder quantitative Risikomerkmale vorgegeben wie Geschlecht und Alter. Risikoklassen bezüglich Geschlecht und Alter heißen Kohorten. Wir wollen die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten schätzen.

Diese Tafeln sehen so aus:

Die Lebensalter werden in dem Bereich $AB := \{x_0, x_0 + 1, \dots, \omega\}$ berücksichtigt. ($x_0 = 0$, aber auch $x_0 = 15$ oder $x_0 = 20$, $\omega = 101$, $\omega = 111$). Zu jedem Alter $x \in AB$ wird ein Schätzwert ${}^u\mathrm{q}_x$ festgehalten, der angibt, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Person der Kohorte, der das Alter x erreicht hat, bis $x + 1$ stirbt. Das Schlussalter ω ist das kleinste Alter mit unabhängiger Sterbenswahrscheinlichkeit 1, gegebenenfalls wird die Sterbetafel erweitert. Entsprechend der üblichen Vorgehensweisen werden wir das u unterdrücken und nicht zwischen Schätzwert und Wahrscheinlichkeit unterscheiden.

Zunächst werden Sterbetafeln zweiter Ordnung für die einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten erstellt und gegebenenfalls mit Hilfe statistischer Test überprüft. (Stand 1999, bzw. DAV 1994).

Als nächstes wird eine Generationentafel zweiter Ordnung erstellt, die die Sterbewahrscheinlichkeiten in späteren Jahren enthält. Die Generationentafeln enthalten die Werte

$$\frac{{}_{k+1}\mathrm{q}_{x-k} - {}_k\mathrm{q}_{x-k}}{{}_k\mathrm{p}_{x-k}},$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit

$$P(T_{x-k} \leq k + 1 | T_{x-k} > k)$$

eines in k Jahren x-jährigen Mannes, innerhalb eines Jahres zu sterben.

Mit Hilfe eines Modells wird der Trend ermittelt (Reduktion der Sterblichkeiten um etwa 2% pro Jahr.)

$$\frac{{}_{k+2}\mathrm{q}_{x-k-1} - {}_{k+1}\mathrm{q}_{x-k-1}}{{}_{k+1}\mathrm{p}_{x-k-1}} = \frac{{}_{k+1}\mathrm{q}_{x-k} - {}_k\mathrm{q}_{x-k}}{{}_k\mathrm{p}_{x-k}} G(x, k).$$

Für die Kalkulation der Versicherungen müssen Tafeln erster Ordnung erstellt werden, in die Sicherheitszu/abschläge eingearbeitet werden.

Dazu werden Fehler aller Art berücksichtigt:

1. Statistische Fehler bei der Aufstellung der Sterbewahrscheinlichkeiten. Insbesondere: Hohes Alter (wenig Daten), nicht korrekte Population, nicht berücksichtigte Abhängigkeiten.

2. Fehler beim Trend.

3. Annahmen bzgl. der Zinsen.

Mit Hilfe von Barwertberechnungen muss die Auswirkung geänderter Annahmen auf die Versicherung bestimmt werden. Die Sicherheitszuschläge sind so zu bemessen, dass die Versicherung unter ungünstigen Annahmen in der Lage bleibt, die garantierten Leistungen zu erbringen.

Ein Mittel sind Rückversicherungen.

Nach Ablauf eines Jahres entsteht ein hoher Überschuss, der zu einem großen Teil an die Versicherten zurückgegeben wird in Form von

1. Beitragsrückzahlungen
2. Erhöhten Leistungen

Dies erfordert eine nachträgliche Analyse des Gewinns.

3.7 Stochastische Prozesse

Definition 3.7.1 *Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $T \subset \mathbb{R}$ entweder $[0,\infty)$, $\{0, 1, \dots\}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathcal{Z}$ und $(S, \mathcal{B})$ ein Maßraum. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in T}$ ist eine Abbildung*

$$X : \Omega \times T \to S,$$

für die alle Mengen

$$\{(t, \omega) : X_t(\omega) \in A\}$$

für $A \in \mathcal{B}$ messbar sind. Für festes $\omega \in \Omega$ ist die Abbildung

$$t \to X_t(\omega)$$

eine Trajektorie. Wir nehmen immer an, dass diese Trajektorien rechtsstetig sind und linke Limiten besitzen. X_t ist eine Zufallsvariable.

Im Folgenden wird S immer abzählbar (und damit $S = \{1, 2, \dots N\}$ oder $S = \mathbb{N}$, und $\mathcal{B}$ wird immer die Potenzmenge sein.

Definition 3.7.2 *Sei X_t ein stochastischer Prozess. Für $j \in S$ sei*

$$I_j(t)(\omega) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } X_t(\omega) = j \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

die Indikatorfunktion des Prozesses zur Zeit t.

Analog sei für $T = [0, \infty)$ und $j, k \in S$

$$N_{jk}(t, \omega)) = \#\{\tau \in (0, t) : X_{\tau-0}(\omega) = j \textit{ und } X_\tau(\omega) = k\}$$

die Anzahl der Sprünge von $\{j\}$ nach $\{k\}$.

Definition 3.7.3 *Eine Zufallsvariable X heißt normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 falls die Verteilung von X die Dichte*

$$f_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$$

besitzt. Wir schreiben $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Beispiele sind:

1. Die Brownsche Bewegung ist ein stochastistischer Prozess mit $T = [0, \infty)$, $S = \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften
   (a) $X_0 = 0$ fast sicher.
   (b) Der Prozess hat unabhängige Zuwächse, d.h. für $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots t_n$ sind die Zufallsvariablen $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ alle unabhängig.
   (c) Für $0 \leq s < t$ ist $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t)$.
2. Der Poissonprozess N_t. Hier ist $T = [0, \infty)$, $S = \{0, 1, \ldots\}$ und $\lambda > 0$ mit den Eigenschaften:
   (a) $N_0 = 0$ fast sicher.
   (b) Der Prozess hat unabhängige stationäre Zuwächse.
   (c) $P(N_t = k) = \exp(-\lambda t)\frac{(\lambda t)^k}{k!}$.
3. Summe unabhängiger Würfel
4. Zustände in der Lebensversicherung: Lebend, Invalide, Tod.

Wir benötigen Markovketten. S sei eine abzählbare Menge.

Definition 3.7.4 *Der Prozess X heißt Markovkette, falls für alle*

$$n \geq 1, 0 \leq t_1 < t_2 \cdots < t_{n+1}, i_1, \ldots i_{n+1} \in S$$

mit

$$P(X_{t_j} = i_j, 1 \leq j \leq n) > 0$$

$$P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_j} = i_j, 1 \leq j \leq n) = P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} | X_{t_n} = i_n). \quad (3.7.1)$$

Definition 3.7.5 *Wir definieren für $s \leq t$, $i, j \in S$*

$$p_{ij}(s,t) = P(X_t = j | X_s = i)$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit, von i nach j zu wechseln, falls $P(X_s = i) > 0$.

Satz 3.7.6 (Chapman-Kolmogorov) *Sei X_t eine Markovkette, $s \leq t \leq u$ $P(X_s = i) > 0$. Dann gilt*

$$p_{ik}(s,u) = \sum_{j \in S} p_{ij}(s,t) p_{jk}(t,u) \tag{3.7.2}$$

und, mit $P = (p_{ij}(s,t))_{ij}$,

$$P(s,u) = P(s,t)P(t,u),$$

wobei das Produkt wie bei der Matrixmultiplikation definiert ist.

Definition 3.7.7 (Übergangsmatrix) *Eine Familie $p_{ij}(s,t)$ heißt Übergangsmatrix, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:*

1. $p_{ij}(s,t) \geq 0$.
2. $\sum_{j \in S} p_{ij}(s,t) = 1$.
3. $p_{ij}(s,s) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } i = j \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$.
4. *Die Gleichung* (3.7.2) *ist erfüllt.*

Satz 3.7.8 *Eine Markovkette definiert eine Übergangsmatrix.*

Hierbei definieren wir $p_{ii}(s,t) = 1$, $p_{ij}(s,t) = 0 (i \neq j)$, falls $P(X_s = i) = 0$.

Die Umkehrung erfordert tiefere Hilfsmittel aus der Stochastik.

Satz 3.7.9 *Ein stochastischer Prozess (X_t) ist genau dann eine Markovkette, falls*

$$P(X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \ldots X_{t_n} = i_n) = P(X_{t_1} = i_1) \prod_{k=1}^{n-1} p_{i_k, i_{k+1}}(t_k, t_{k+1})$$

für

$$n \geq 1, 0 \leq t_1 < t_2 \ldots t_{n+1} \in T, i_k \in S.$$

Definition 3.7.10 *Eine Markovkette heißt homogen, falls für $s < t, h \in \mathbb{R}$, $s, t, s+h, t+h \in T$ mit $P(X_s = i) > 0$ und $P(X_{s+h} = i) > 0$*

$$P(X_t = j | X_s = i) = P(X_{t+h} = j | X_{s+h} = i)$$

gilt. Wir schreiben dann $p_{ij}(h) := p_{ij}(s, s+h)$.

In diesem Fall vereinfachen sich die Chapman-Kolmogorovgleichungen zu

$$P(s+t) = P(s)P(t),$$

wobei P die zugehörigen Matrizen sind. Die Abbildung $T \ni t \to P(t)$ definiert eine sogenannte Halbgruppe.

Im Folgenden betrachten wir nur endliche Zustandsräume S.

Definition 3.7.11 *Es sei X_t eine Markovkette mit endlichem Zustandsraum S. Für $s < t, s, t \in T$ und $N \subset S$ definieren wir*

$$p_{jN}(s,t) = \sum_{k \in N} p_{ik}(s,t).$$

Definition 3.7.12 *Sei X_t eine Markovkette mit $T = [0, \infty)$ und endlichem Zustandsraum S. Wir nennen X_t regulär, falls die Funktion $t \to p_{ij}(s,t)$ in $[s, \infty)$ stetig differenzierbar ist und falls die Ableitungen in s und t stetig sind. In diesem Fall definieren wir für $t \geq 0$ und $i, j \in S$, $i \neq j$*

$$\mu_i(t) = \lim_{h>0, h\to 0} \frac{1 - p_{ii}(t, t+h)}{h} \tag{3.7.3}$$

$$\mu_{ij}(t) = \lim_{h>0, h\to 0} \frac{p_{ij}(t, t+h)}{h} \tag{3.7.4}$$

sowie

$$\mu_{ii}(t) = -\mu_i. \tag{3.7.5}$$

Diese Größen heißen Übergangsintensitäten der Markovkette.

Die Regularität vereinfacht viele Überlegungen, aber sie trennt den zeitdiskreten und den kontinuierlichen Fall. Beides läßt sich kombinieren, was wir aber nicht verfolgen werden. Es gilt

$$\sum_{j \in S} \mu_{ij} = 0 \tag{3.7.6}$$

wegen

$$1 = \sum_{j \in S} p_{ij}(t)$$

Sei

$$M(t) = (\mu_{ij}(t)) \tag{3.7.7}$$

die Matrix der Übergangsintensitäten. Für homogene Markovketten ist $M(t) = M(0) := M$,

$$M = \lim_{h>0, h\to 0} \frac{P(h) - E}{h}$$

und damit (gewöhnliche Differentialgleichungen)

$$P(t) = \exp(tM) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} M^n.$$

Satz 3.7.13 (Kolomogorov) *Sei X_t eine reguläre Markovkette mit endlichem Zustandsraum S. Dann gelten folgende Aussagen:*

$$\frac{d}{ds} p_{ij}(s,t) = \mu_i(s) p_{ij}(s,t) - \sum_{k \neq i} \mu_{ik}(s) p_{kj}(s,t) \tag{3.7.8}$$

$$\frac{d}{ds}P(s,t) = -M(s)P(s,t) \tag{3.7.9}$$

$$\frac{d}{dt}p_{ij}(s,t) = -p_{ij}(s,t)\mu_j(t) + \sum_{k\neq i} p_{ik}(s,t)\mu_{kj}(t) \tag{3.7.10}$$

$$\frac{d}{dt}P(s,t) = P(s,t)M(t) \tag{3.7.11}$$

Definition 3.7.14 *Sei X_t eine reguläre Markovkette mit endlichem Zustandsraum S, $s \leq t \in T$, $j \in S$. Wir bezeichnen die bedingte Wahrscheinlichkeit, im Intervall $[s,t]$ im Zustand j zu bleiben, mit*

$$\overline{p}_{jj}(s,t) := P\Big(\omega : X_\xi = j \text{ für } \xi \in [s,t] \Big| X_s(\omega) = j\Big).$$

Satz 3.7.15 *Für eine reguläre Markovkette und $s \leq t$ gilt*

$$\overline{p}_{ij}(s,t)0 = \exp(-\sum_{k\neq j}\int_s^t \mu_{jk}(\tau)d\tau) = \exp(-\int_s^t \mu_j(\tau)d\tau).$$

Wir erhalten

$$\frac{d}{dt}\overline{p}_{jj}(s,t) = -\overline{p}_{jj}(s,t)\mu_{jj}(t) \tag{3.7.12}$$

3.7.1 Beispiele

1. Todesfallversicherung: Die Erben erhalten 100000 Euro beim Tod der versicherten Person. Zwei Zustände: $*$ lebend, $+$ Tod.

$$\mu_{*+}(t) = \exp(-9.13 + 0.0809(t+x) - 0.00001101(t+x)^2)$$

2. Invaliditätsmodell mit drei Zuständen ($*$ lebend, $+$ Tot, $\diamond$ Invalide)

$$\sigma(t) = 0.0004 + 10^{(0.06t-5.46)}$$

$$\mu(t) = 0.0005 + 10^{(0.038t-4.12)}$$

$$\mu_{*\diamond}(t) := \sigma(t)$$

$$\mu_{*+} := \mu(t)$$

$$\mu_{\diamond+}(t) := \mu(t)$$

$$M(x) = \begin{pmatrix} -\sigma-\mu & \sigma & \mu \\ 0 & -\mu & \mu \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}p_{**}(s,t) =& p_{**}(s,t)(-\sigma(t)-\mu(t))\\
\frac{d}{dt}p_{*\diamond}(s,t) =& p_{**}(s,t)\sigma(t)+p_{*\diamond}(s,t)(-\mu(t))\\
\frac{d}{dt}p_{*+}(s,t) =& p_{**}(s,t)\mu(t)+p_{*\diamond}(s,t)\mu(t)\\
\frac{d}{dt}p_{\diamond *}(s,t) =& 0\\
\frac{d}{dt}p_{\diamond\diamond}(s,t) =& p_{\diamond\diamond}(-\mu(t))\\
\frac{d}{dt}p_{\diamond +}(s,t) =& p_{\diamond\diamond}\mu(t)\\
\frac{d}{dt}p_{+*}(s,t) =& 0\\
\frac{d}{dt}p_{+\diamond}(s,t) =& 0\\
\frac{d}{dt}p_{++}(s,t) =& 0
\end{aligned}
$$

Kapitel 4

Versicherungsleistungen in der Lebensversicherung

4.1 Zufällige Zahlungsströme

Erinnerung; Deterministische Zahlungsströme: Z eine rechtsstetige BV Funktion in kompakten Intervallen, K eine monoton wachsende Kapitalfunktion, $v = K^{-1}$ die Diskontierungsfunktion.

Der Wert des Zahlungsstromes zur Zeit t ist

$$V(t, Z) = K(t) \int_0^\infty v(\tau) dZ(\tau), \tag{4.1.1}$$

der Wert des zukünftigen Zahlungsstromes bzw. der prospektiven Reserve

$$V^+(t, Z) = K(t) \int_t^\infty v(\tau) dZ(\tau). \tag{4.1.2}$$

Definition 4.1.1 *Ein zufälliger Zahlungsstrom ist ein stochastischer Prozess mit endlicher Variation, d.h. ein Prozess Z_t, für den fast sicher alle Pfade von endlicher Totalvariation auf beschränkten Intervallen sind.*

Definition 4.1.2 *Für einen stochastischen Prozess (A_t) auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit endlicher Variation und eine produktmessbare, beschränkte Funktion $F : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir den Prozess*

$$(F \cdot A)_t(\omega) = \int_0^t F(\tau, \omega) dA(\tau)(\omega) = \int_0^t F dA.$$

Symbolisch schreiben wir den Zusammenhang als

$$d(F \cdot A) = F dA.$$

Definition 4.1.3 *Wir betrachten eine Lebensversicherung über dem endlichen Zustandsraum S mit Auszahlungsfunktionen $a_{ij}(t) \in BV$ und $a_i(t) \in BV$. Wir definieren*

$$dA_{ij}(t,\omega) = a_{ij}(t)dN_{ij}(t,\omega)$$

$$dA_i(t)(t,\omega) = I_i(t,\omega)da_i(t)$$

$$dA = \sum_{i\in S} dA_i + \sum_{(i,j)\in S, i\neq j} dA_{ij},$$

wobei A_{ij} der kumulative zufällige Teilzahlungsstrom ist, der durch Kapitalzahlungen vom Zustand i nach Zustand j induziert wird. Bei $A_i(t,\omega)$ handelt es sich um den kumulativen zufälligen Zahlungsstrom, welcher durch Renten im Zustand i bis zum Zeitpunkt t induziert wird.

Definition 4.1.4 *Wir definieren die Zufallsvariable*

$$V^+(t,A) = v(t)^{-1} \int_t^\infty v(\tau)dA$$

und die prospektive Reserve als bedingte Erwartung

$$V_j^+(t,A) = E(V^+(t,A)|X_t = j).$$

Definition 4.1.5 *Sei X_t eine Markovkette und V_t ein stochastischer Zahlungsstrom. V_t heißt* adaptiert*, falls der Wert*

$$V_t(\omega)$$

fast sicher durch $(X_s(\omega))_{0\leq s\leq t}$ bestimmt ist.

Definition 4.1.6 *Ein reguläres Versicherungsmodell besteht aus*

1. *einer regulären Markovkette $(X_t)_{t\in T}$.*
2. *Auszahlungsfunktionen (BV Funktionen) $a_{ij}(t)$ und $a_i(t)$.*
3. *Zinsintensitäten $\delta_i(t)$, die rechtseitig stetig sind.*

Definition 4.1.7 *Das Deckungskapital für das Bleiben in einem Zustand $g \in S$ gestützt auf $X_t = j$ bezüglich eines Zeitabschnitts $T \in \mathcal{B}([t,\infty))$ definieren wir als*

$$V_j(t, A_{gT}) = E\Big[\frac{1}{v(t)} \int_T v(\tau)dA_g(\tau)|X_t = j\Big]$$

und analog für Sprünge

$$V_j(t, A_{ghT}) = E\Big[\frac{1}{v(t)} \int_T v(\tau)dA_{gh}(\tau)|X_t = j\Big].$$

Wir schreiben $V_j(t, A_g)$ statt $V_j(t, A_{g\mathbb{R}})$ und $V_j(t, A_{gh})$ statt $V_j(t, A_{gh\mathbb{R}})$. Die totale Reserve oder das Deckungskapital zu einem Zustand j ist

$$V_j(t, A) = \sum_{g\in S} V_j(t, A_g) + \sum_{g,h\in S, g\neq h} V_j(t, A_{gh}).$$

Wir definieren die Zufallsvariablen analog

$$V(t, A_{gT}) = \frac{1}{v(t)} \int_T v(\tau) dA_g(\tau)$$

$$V(t, A_{ghT}) = \frac{1}{v(t)} \int_T v(\tau) dA_{gh}(\tau)$$

Satz 4.1.8 *Sei $(X_t)_{t\in T}$ eine reguläre Markovkette auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Seien $i, j, k \in S, s < t$ und $T \subset [s, \infty)$ Borelsch. Dann gilt*

1. *Für $a \in L^1(\mathbb{R})$*

$$E\Big[\int_T a(\tau) dN_{jk}(\tau) | X_s = i\Big] = \int_T a(\tau) p_{ij}(s, \tau) \mu_{jk}(\tau) d\tau. \tag{4.1.3}$$

2. *Für Funktionen A mit totalbeschränkter Variation gilt*

$$E\Big[\int_T I_j(\tau) dA(\tau) | X_s = i\Big] = \int_T p_{ij}(s, \tau) dA(\tau). \tag{4.1.4}$$

Satz 4.1.9 *Sei X_t eine reguläre Markovkette auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, und seien a_i und a_{ij} Auszahlungsfunktionen, K eine Kapitalfunktion und v die Diskontierungsfunktion und $T \subset [s, \infty)$ Borelmenge. Dann erhalten wir*

$$E[V(t, A_{jT}) | X_s = i] = \frac{1}{v(t)} \int_T v(\tau) p_{ij}(s, \tau) da_j(\tau) \tag{4.1.5}$$

$$E[V(t, A_{jkT}) | X_s = i)] = \frac{1}{v(t)} \int_T v(\tau) a_{jk}(\tau) p_{ij}(s, \tau) \mu_{jk}(\tau) d\tau \tag{4.1.6}$$

$$\begin{aligned} &E[V(t, A_{jS}) V(t, A_l T) | X_s = i] \\ &\quad = \frac{1}{v(t)^2} \int_{S\times T} v(\theta) v(\tau) \left\{\chi_{\theta\leq\tau} p_{ij}(s, \theta) p_{jl}(\theta, \tau) + \chi_{\theta>\tau} p_{il}(s, \tau) p_{lj}(\tau, \theta)\right\} da_j(\theta) da_l(\tau) \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

$$\begin{aligned} &E[V(t, A_{jkS}) V(t, A_{lmT}) | X_s = i] \\ &\quad = \frac{1}{v(t)^2} \int_{S\times T} v(\theta) v(\tau) \left\{\chi_{\theta\leq\tau} p_{ij}(s, \theta) p_{kl}(\theta, \tau) + \chi_{\theta>\tau} p_{il}(s, \tau) p_{mj}(\tau, \theta)\right\} \\ &\qquad \times \mu_{jk}(\theta) \mu_{lm}(\tau) a_{jk}(\theta) a_{lm}(\tau) d\theta d\tau \\ &\quad + \frac{1}{v(t)^2} \delta_{jk,lm} \int_{T\cap S} v(\tau)^2 p_{ij}(s, \tau) \mu_{jk}(\tau) a_{jk}^2 d\tau \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

$$\begin{aligned} &E[V(t,A_{jS})V(t,A_{lmT})] \\ =&\frac{1}{v(t)^2}\int_{S\times T} v(\theta)v(\tau)\left\{\chi_{\theta\leq\tau}p_{ij}(s,\theta)p_{jl}(\theta,\tau)+\chi_{\theta>\tau}p_{il}(s,\tau)p_{mj}(\tau,\theta)\right\} \\ &\times\mu_{lm}(\tau)a_{lm}(\tau)da_j(\theta)d\tau \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

Insbesondere erhalten wir Formeln für Erwartungswerte und Varianzen.

Satz 4.1.10 *Wir erhalten die folgenden Formeln für die prospektiven Reserven.*

$$V_j^+(t)=\frac{1}{v(t)}\left(\sum_{g\in S}\int_t^\infty v(\tau)p_{jg}(t,\tau)da_g(\tau)+\sum_{g\neq h\in S}\int_t^\infty v(\tau)p_{jg}(t,\tau)a_{gh}(\tau)\mu_{gh}(\tau)d\tau\right) \tag{4.1.10}$$

Diese Formeln sind jedoch nicht einfach zu nutzen, da in aller Regel die Intensitäten gegeben sind.

Definition 4.1.11 *Es sei*

$$W_j^+(t)=v(t)V_j^+(t).$$

Satz 4.1.12 *Es gilt*

$$\begin{aligned} W_j^+(t)=&\sum_{g\in S}p_{jg}(t,u)W_g^+(u) \\ &+\sum_{g\in S}\int_t^u v(\tau)p_{jg}(t,\tau)da_g(\tau)+\sum_{g\neq h}\int_t^u v(\tau)p_{jg}(t,\tau)a_{gh}(\tau)\mu_{gh}(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Wir leiten die *Thieleschen Differentialgleichungen* her.

Satz 4.1.13 (Thielesche Differentialgleichungen) *Annahmen: Die Kapitalfunktion und die Auszahlungsfunktionen a_g seien stetig differenzierbar, (X_t) sei eine reguläre Markovkette. Dann ist $W_g^+(t)$ stetig differenzierbar für alle $g\in S$ und*

$$\frac{d}{dt}W_j^+(t)=-v(t)\left\{a_j'(t)+\sum_{j\neq g\in S}\mu_{jg}(t)a_{jg}(t)\right\}+\mu_j(t)W_j^+(t)-\sum_{j\neq g\in S}\mu_{jg}(t)W_g^+(t) \tag{4.1.11}$$

$$V_j^+(t)=\frac{1}{v(t)}\Big[\int_t^u v(\tau)\bar{p}_{jj}(t,\tau)\{a_j'(\tau)+\sum_{j\neq g\in S}\mu_{jg}(\tau)(a_{jg}(\tau)+V_g^+(\tau))\}d\tau+v(u)\bar{p}_{jj}(t,u)V_j^+(u^-)\Big] \tag{4.1.12}$$

Die Reserve setzt sich zusammen aus der Reserve für Zahlungen im Zustand j (Renten plus Prämien), Reserve für Zustandswechsel (Transaktionspreis plus nötige Reserve im neuen Zustand, sowie der Reserve, falls man nach $[t,u]$ noch im Zustand j ist.

4.2 Beispiel zur Thieleschen Differentialgleichung

Temporäre Todesfallversicherung: Höhe b, Prämien c.

$$\frac{d}{dt}W_*(t) = v(t)(c - \mu_x(t)b) + \mu_x(t)W_*(t) - \mu_x(t)W_+(t)$$

$$\frac{d}{dt}W_+(t) = 0$$

mit $W_*(s) = W_+(s) = 0$ zum Ende der Versicherung.

Gemischte Versicherung Todesfallsumme: 200000 Euro, Erlebensfall 100000 Euro, $x = 30$, Schlussalter 65.

Fragen: Wie hoch ist die nötige Einlage bei einer technischen Verzinsung von 3,5%?

Sterbeintensität

$$\mu(t) = \mu_{*+}(t)\exp(-9.13275 + 8.09438 * 10^{-2}t - 1.10180 * 10^{-5}t^2) \tag{4.2.1}$$

$a_{*+}(t) = 200000$ falls $t < 65$, 0 sonst.

$$\frac{d}{dt}W_*(t) = -v(t)\mu(t)a_{*+}(t) + \mu(t)W_*(t) - \mu(t)W_+(t)$$

$$\frac{d}{dt}W_+(t) = 0$$

mit der Randbedingung $W_*(65) = v(65)100000$ und $W_+(65) = 0$.

4.3 Der zeitdiskrete Fall

Gegeben sei eine Markovkette $(X_t)_{t=0,1,\dots}$ mit einem endlichen Zustandsraum S und Übergangswahrscheinlichkeiten $(p_{ij}(s)) = (p_{ij}(s, s+1))$. Zu Beginn einer Periode $[s, s+1]$ wird eine Zahlung a_i^{Pre} fällig, falls sich die Markovkette im Zustand i befindet. Bei einem Übergang von i nach j wird am Ende die Zahlung $a_{ij}(t)^{Post}$ fällig. Im Gegensatz zum kontinuierlichen Fall verwenden wir keine kumulativen Auszahlungsfunktionen.

Wir erhalten

$$\Delta A_{ij}(t,\omega) = \Delta N_{ij} a_{ij}(t)^{Post}$$

$$\Delta A_i(t,\omega) = I_i(t,\omega)a_i^{Pre}(t)$$

$$\Delta A(t,\omega) = \sum_{i\in S}\Delta A_i(t,\omega) + \sum_{i,j\in S, i\neq j}\Delta A_{ij}(t,\omega).$$

wobei $\Delta N_{ij}(t) = N_{ij}(t+1) - N_{ij}(t)$.

Die zufälligen Werte der Zahlungsströme werden wieder mit $V(t, A_{gT})$, $V(t, A_{ghT})$, $V(t, A_T)$ bzw $V^+(t, A_T)$ und die bedingten Erwartungen mit $V_j(t, A_gT)$, $V(t, A_{ghT})$, $V(t, A_T)$ sowie $V^+(t, A)$ bezeichnet.

Satz 4.1.8 überträgt sich zu

$$E\left[\sum_{\tau\in T} a(\tau)\Delta N_{jk}(\tau)|X_s = i\right] = \sum_{\tau\in T} a(\tau)p_{ij}(s,\tau)p_{jk}(\tau,\tau+1) \tag{4.3.1}$$

bzw.

$$E\left[\sum_{\tau\in T} I_j(\tau)\Delta A(\tau)|X_s = i\right] = \sum_{\tau\in T} p_{ij}(s,\tau)\Delta A(\tau) \tag{4.3.2}$$

Ein Analogon der Formel von Satz 4.1.12 bleibt richtig. Insbesondere erhalten wir die Thielesche Differenzengleichung:

Satz 4.3.1 (Thielesche Differenzengleichung) *Wir erhalten für das prospektive Deckungskapital die folgende Rekursion*

$$V_i^+(t) = a_i^{Pre} + \sum_{j\in S} \frac{v(t+1)}{v(t)} p_{ij}(t)\left\{a_{ij}^{Post} + V_j^+(t+1)\right\}$$

Bemerkung 4.3.2 *Wir können eine Markovkette in kontinuierlicher Zeit immer auf diskrete Zeitpunkte einschränken. Dabei entsteht ein Fehler durch unterjährige Zahlungen, also entweder durch Zahlungen, die durch Übergänge in kontinuierlicher Zeit, durch unterjährige Rentenzahlungen oder durch unterjährige Prämienzahlungen. Das kontinuierliche Modell ist nötig, um den dadurch gemachten Fehler beurteilen zu Können.*

Beispiel: Gemischte Versicherung in diskreter Zeit: Todesfallsumme von 200000 Euro, Erlebensfallsumme 100000 Euro. Fragen: Notwendige Einmaleinlage, technischer Zinssatz 3,5%? Jahresprämie ?

$$\mu_{*+}(x)\exp(-9.13275 + 8.09438 * 10^{-2}x - 1.10180 * 10^{-5}x^2) \tag{4.3.3}$$

unter der Stationaritätsannahme.

$$p_{**}(35,t) = \exp(-\int_{35}^{t} \mu_{*+}(\tau)d\tau) \tag{4.3.4}$$

und

$$p_{**}(t,t+1) = \exp(-\int_{t}^{t+1} \mu_{*+}(\tau)d\tau)$$
$$p_{*+}(t,t+1) = 1 - p_{**}(t,t+1)$$
$$p_{++}(t,t+1) = 1$$
$$p_{+*}(t,t+1) = 0$$

Es ist

$$a_{*+}^{Post}(t) = \begin{cases} 200000, & \text{falls } x < 65 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

und

$$a_{**}^{Post}(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 64 \\ 200000, & \text{falls } x = 64 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Prämienzahlungsstrom ist durch

$$a_{*}^{Pre}(t) = \begin{cases} -P & \text{falls } x < 64 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

gegeben.

Die Prämie ist so zu bestimmen, dass der Wert der Versicherung zur Abschlusszeitpunkt Null ist. Wir erhalten eine Prämie von 2129.15 Euro.

Kapitel 5

Höhere Momente und Martingale

Zunächst betrachten wir den zeitdiskreten Fall.

Satz 5.0.3 *Für die höheren Momente ($p \in \mathbb{N}$) gilt die Rekursion*

$$\begin{aligned} V_i^{(p)}(t) :=& E[(V^+(t))^p | X_t = i] \\ =& (v(t+1)/v(t))^p \sum_{j \in S} p_{ij}(t, t+1) \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left[a_{ij}^{Post} + v(t)/v(t+1) a_i^{Pre}(t)\right]^{p-k} \\ & \times V_j^{(k)}(t+1) \end{aligned}$$

Der kontinuierliche Fall sieht so aus:

Satz 5.0.4 *Sei (X_t) ein regulärer Markovprozess und $v(t)$ eine absolutstetige Diskontierungsfunktion. Unter den obigen Voraussetzungen gilt*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V_j^{(p)}(t) =& \Big(p\delta(t) + \sum_{j \neq k} \mu_{jk}(t)\Big) V_j^{(p)}(t) \\ & - p\dot{a}_j(t) V_j^{(p-1)}(t) - \sum_{j \neq l} \mu_{jl}(t) \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (a_{jl}(t))^{p-k} V_l^{(k)}(t) \end{aligned}$$

fast überall und an den Sprungstellen von $V_j^{(p)}$

$$V_j^{(p)}(t-0) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (\Delta a_j(t))^{p-k} V_j^{(k)}(t).$$

$$W_j^{(p)} = v(t)^p V_j^{(p)}(t)$$

Partielle Integration:

$$dW_j(t) = dv(t)V_j(t) + vdV_j(t)$$

$$dW_j^{(p)}(t) = dv^p(t) + v(t)^p dV_j^{(p)}(t) = -p\delta v^p V_j^{(p)} dt + v^p dV_j^{(p)}$$

Per Definition sind alle Größen rechtsstetig. Wir verifizieren mit

$$M_{jk}(t) = N_{jk}(t) - N_{jk}(0) - \int_0^t I_j(\tau)\mu_{ij}(\tau)dt$$

$$\begin{aligned}
dM^{(p)}(t) - \sum_{j\neq l\in S}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\Big(&\{U(t-)+va_{jl}(t)\}^k W_l^{(p-k)}(t) \\
&- U(t-)^k W_l^{(p-k)}(t-)\Big)dM_{jl}(t) \\
=\sum_{j\in S} I_j(t)\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}&\Big[kU^{k-1}(t)v\dot{a}_j W_j^{(p-k)}(t)dt + U^k dW_j^{(p-k),cont}(t) \\
&+\sum_{j\neq l}\big(\{U-va_{jl}\}^k W_l^{(p-k)}(t) - U^k W_j^{(p-k)}(t)\big)\mu_{jl}(t)dt \\
&+\sum_{j\in S} I_l(t-)\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\Big[\{U(t-)+v\Delta a_j(t)\}^k W_j^{(p-k)}(t) - U(t-)W_j^{(p-k)}(t-)\Big]
\end{aligned}$$

Wir definieren

$$X_t^s(\omega) = X_{\min\{s,t\}}(\omega).$$

Definition 5.0.5 *Sei (X_t) eine Markovkette mit endlichem Zustandsraum. Ein stochastischer Prozess M_t heißt Martingal falls (1) eine Abbildung $\tilde{M} : \{t \to X_t(\omega)$ mit endlich vielen Sprüngen $\} \to \mathbb{R}$ existiert*

$$M_t(\omega) = \tilde{M}(X_\cdot^t(\omega)$$

und (2) aus

$$0 \le s_1 \le .. \le s_m = s < t, \qquad j_i \in S$$

folgt

$$E[M(t) - M(s)|X_{t_i} = j_i, 1 \le i \le m] = 0.$$

Mit der Information bis zur Zeit s erhält man für die Differenz immer den Erwartungwert Null.

Beispiele: $M^{(p)}$, $M_{jk}(t)$ und Integrale darüber. Auf der linken Seite steht also ein Martingal.

$$E(M^{(p)}(t) - M^{(p)}(s)|X_s = j) = 0$$

$$E(M_{jl}(t) - M_{jl}(s)|X_s = j) = 0$$

Damit gilt dies auch rechts. Also verschwinden die bedingten Erwartungswerte der Zuwächse rechts. Genauer verschwinden die Erwartungswerte von

$$\int_s^t \sum_j \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (I_j(t)U)^k(t) dQ_j^{(p-k)}(\tau) \tag{5.0.1}$$

wobei

$$\begin{aligned} dQ_j^{(q)} =& qv(t)\dot{a}_j(t)W_j^{(q-1)}(t)dt + dW_j^{(q),cont}(t) \\ &+ \sum_{k=0}^q \sum_{j \neq l \in S} \{va_{jl}\}^k W_l^{(q-k)} \mu_{jl}(t)dt - W_j^{(q)} \sum_{j \neq l \in S} \mu_{jl}(t)dt \end{aligned}$$

Nun ist $dQ_j^{(0)} = 0$ und mittels vollständiger Induktion auch $dQ_j^{(p)} = 0$.

5.1 Die Verteilungsfunktion der Reserve

Wir betrachten einen stochastischen Prozess (X_t) mit endlichem Zustandsraum über den nichtnegativen ganzen Zahlen, durch a_j^{Pre} und a_{jk}^{Post} gegebene Zahlungen,

$$V^+(t,\omega) = v(t)^{-1} \sum_{\tau=t}^{\infty} \left\{ v(\tau) \sum_j I_j(\tau,\omega) a_j(\tau) + v(\tau+1) \sum_{j,l \in S} a_{jl}^{Post}(\tau) \Delta N_{jl}(\tau,\omega) \right\}$$

und

$$P_i(t,u) = P\left[V^+ \leq u | X_t = i\right]$$

Satz 5.1.1 *Es gilt folgende Rekursion:*

$$P_i(t,u) = \sum_{j \in S} p_{ij}(t) P_j\Big(t+1, \frac{v(t)}{v(t+1)}[u - a_i^{Pre} - a_{ij}^{Post}(t)]\Big) \tag{5.1.1}$$

Die Randbedingung am Endalter ω ist in der Regel

$$P_i(\omega+1,u) = \begin{cases} 0 & \text{falls } u \leq 0 \\ 1 & \text{falls } u > 0 \end{cases}$$

Kapitel 6

Der Varianzprozess und das Hattendorffsche Theorem

6.1 Rückblick

In Kapitel 2 hatten wir allgemeine Zahlungsströme $Z(t)$ betrachtet, deren Bewertung (Definition 2.29) äquivalent zur Wahl einer Kapitalfunktion $K(t)$ ist. Damit hatten wir mit Hilfe der Diskontierungsfunktion $v(t) = K(t)^{-1}$ den Barwert des Zahlungstromes zur Zeit 0

$$a(Z) = \int_0^\infty v(\tau)dZ(\tau)$$

erhalten.

In Kapitel 3 haben wir Sterbeordnungen, Ausscheideintensitäten, einjährige Sterbewahrscheinlichkeiten und Sterbetafeln (erster und zweiter Ordnung) diskutiert.

Kapitel 4 war der Modellierung des Versicherungsprozesses durch (reguläre) Markovprozesse mit endlichem Zustandsraum gewidmet. Von besonderem Interesse war der Barwert der Versicherungsleistung

$$V(t,\omega) = v(t)^{-1} \sum_i \left(\int_0^\infty v(\tau) I_i(\tau,\omega) da_j(\tau) + \sum_{j \neq i} \int_0^\infty v(\tau) a_{ij}(\tau) dN_{ij}(\tau) \right)$$

der prospektive Barwert der Versicherungsleistung

$$V^+(t,\omega) = v(t)^{-1} \sum_i \left(\int_t^\infty v(\tau) I_i(\tau,\omega) da_j(\tau) + \sum_{j \neq i} \int_0^\infty v(\tau) a_{ij}(\tau) dN_{ij}(\tau) \right)$$

sowie das prospektive Deckungskapitel

$$V_j^+(t) = E(V^+(t)|X(t,\omega) = j).$$

Die Thieleschen Differenzen- bzw. Differentialgleichungen erlauben die Berechnung des prospektiven Deckungskapitals und damit die Berechnung der Prämien an Hand des Äquivalenzprinzips: Zu Vertragsabschluss ist das prospektive Deckungskapital Null, falls wir den gesamten Zahlungsstrom berücksichtigen.

Für das Versicherungsunternehmen ist jedoch auch die Risikoexposition wichtig. Daher müssen einerseits höhere Momente, die gesamte Verteilungsfunktion der $V_j^+(t)$ und der Einfluss verschiedener Größen auf die Varianz betrachtet werden. Andererseits muss das Versicherungsunternehmen die eigenen Kosten und den Einfluss diverser Annahmen analysieren, unter anderem um den eigenen Gewinn und den Wert des Vertrages zu ermitteln.

6.2 Begriffe der Stochastik

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine Zufallsvariable (d.h. eine messbare reellwertige Abbildung. Dann heißt X integrierbar (quadratisch integrierbar, fast sicher beschränkt), falls $\int |X| dP < \infty$ ($\int |X|^2 dP < \infty$, es existiert $C > 0$ mit $|X| < C$ fast sicher).

Die zentrale Zufallsvariable ist $V(0, \omega)$, die bei uns fast sicher beschränkt ist. Der Erwartungswert ist

$$E(X) = \int X dP,$$

das p-te Moment ist

$$E(X^p) = \int X^p dP$$

und die Varianz ist

$$Var(X) = \int |X - E(X)|^2 dP = \int X^2 dP - E(X)^2.$$

Sind X_j Zufallsvariable, so definieren wir die Covarianzmatrix als

$$(C_{ij}) = \int (X_i - E(X_i))(X_j - E(X_j)) dP.$$

Die Zufallsvariablen heißen unkorreliert, falls die Covarianzmatrix diagonal ist. Die Covarianzmatrix ist immer positiv semidefinit.

Die Zufallsvariablen heißen unabhängig, wenn alle Ereignisse

$$\{X_j > t_j\}$$

unabhängig sind.

Ist $A \in \mathcal{A}$ ein Ereignis mit $P(A) > 0$ und $B \in \mathcal{A}$, so ist die bedingte Wahrscheinlichkeit durch

$$P(B|A) = P(A)^{-1} P(A \cap B).$$

und die bedingte Erwartung einer Zufallsvariablen durch

$$E(X|A) = P(A)^{-1} \int_A X dP$$

definiert.

In der Versicherungsmathematik rechnet man insbesondere mit den Verteilungen von Zufallsvariablen bzw. den Verteilungsfunktionen

$$F(s) = P(X \leq s).$$

Ein wesentliches Element beim Versicherungsprozess ist die Information: Zur Zeit t ist der Versicherungsverlauf bis zu dieser Zeit bekannt. Für alle $s \leq t$ ist bekannt, ob das Ereignis $X_s = j$ eingetreten ist. Mathematisch führt dies auf den Begriff der Filtrierung:

Definition 6.2.1 (Filtrierung) *Sei X_t ein Markovprozess. Wir definieren die σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ als die kleinste σ-Algebra, die alle Ereignisse $\{X_s = j\}$ $s \leq t, j \in S$ enthält.*

Diese σ-Algebra besteht aus allen Ereignissen, von denen man zur Zeit t aus der Beobachtung von X weiß, ob sie eingetreten sind. Aus $0 \leq s < t$ folgt $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ und

$$\mathcal{F}_t = \cap_{s>t} \mathcal{F}_s$$

da die Pfade immer rechtsstetig sind.

Definition 6.2.2 *Der stochastische Prozess (Y_t) heißt $\mathcal{F}_t$ adaptiert, falls Y_t $\mathcal{F}_t$-messbar ist.*

Definition 6.2.3 *Sei V wie oben und*

$$M(t) = \sum_i \left(\int_0^t v(\tau) I_i(\tau, \omega) da_i(\tau) + \sum_j \int_0^t v(\tau) a_{ij} dN_{ij} + v(t) I_i(t) V_i^+(t) \right) \tag{6.2.1}$$

Der Prozess M beschreibt den erwarteten Barwert des Versicherungsprozesses unter Berücksichtigung der Information bis zur Zeit t.

Satz 6.2.4 *Der Prozess M ist $\mathcal{F}$-adaptiert.*

Definition 6.2.5 (Martingal) *Der reellwertige stochastische Prozess Y_t heißt ein Martingal bzgl. der Filtrierung $\mathcal{F}_t$, falls Y_t $\mathcal{F}_t$-integrierbar ist und für alle $A \in \mathcal{F}_t$ mit $P(A) > 0$ und $s > t$*

$$E(Y_s|A) = E(Y_t|A)$$

gilt.

Bemerkung: Faires Spiel, Beispiel: M_t.

Definition 6.2.6 (Stoppzeiten) *Eine nichtnegative Zufallsvariable T heißt Stoppzeit, falls für alle $t \geq 0$*

$$\{T(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Bemerkung: Zur Zeit t ist bekannt, ob die Stoppzeit $\leq t$ ist. Beispiele:

$$T(\omega) = \inf\{t | N_{ij}(t, \omega) = L\}.$$

Mit S und T sind auch λT, $\lambda > 1$, $\max\{S, T\}$ und $\min\{S, T\}$ Stoppzeiten.

Definition 6.2.7 (Bedingte Erwartung) *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ und X eine $\mathcal{A}$ integrierbare Zufallsvariable. Dann ist $E(X|\mathcal{B})$ die bis auf Nullmengen eindeutige $\mathcal{B}$ messbare Zufallsvariable mit*

$$\int_A E(X|\mathcal{B}) dP = \int_A X dP$$

für alle $A \in \mathcal{B}$.

Bemerkung: Nur die Existenz ist nicht sofort klar. Existenz nach dem Satz von Radon-Nikodym.

Ist X eine integrierbare Zufallsvariable, so ist

$$X_t = E(X|\mathcal{F}_t)$$

ein Martingal. Beispiel:

$$M_t = E(V|\mathcal{F}_t). \tag{6.2.2}$$

Definition 6.2.8 *Sei T eine Stoppzeit und $\mathcal{F}_T$ die kleinste σ-Algebra, für die die Funktionen $\min\{t, T\}$ für $t \geq 0$ messbar sind. Ist Y eine Zufallsvariable, so ist*

$$Y_t^T = Y_{\min\{T,t\}}$$

der gestoppte Prozess.

Satz 6.2.9 (Doobscher Stoppsatz) *Sei (Y_t) ein rechtsstetiges Martingal, S, T zwei beschränkte Stoppzeiten mit $0 \leq S \leq T$ fast sicher. Dann sind $Y_S = E(Y|\mathcal{F}_S)$ und Y_T integrierbar und*

$$Y_S = E(Y_T|\mathcal{F}_S).$$

6.3 Das Hattendorfsche Theorem

Wir betrachten zwei Versionen. Sei (X_t) eine Markovkette, $\mathcal{F}_t$ die zugehörige Filtrierung, V eine quadratintegrierbare Zufallsvariable, $V_t = E(V|\mathcal{F}_t)$ das durch V definierte Martingal, T_j eine nichtfallende Folge von Stoppzeiten, und

$$L_j(\omega) = V_{T_j(\omega)}(\omega) - V_{T_{j-1}}(\omega)$$

für $j \geq 1$ sowie

$$L_0(\omega) = V_0(\omega) - E(V).$$

Satz 6.3.1 (Hattendorff) *1. $E(L_j) = 0$ und die L_j sind unkorreliert.*

2. Für $i < j, k$, $j \neq k$ ist $E(L_j|\mathcal{F}_{T_i}) = 0$ und

$$E(L_j L_k|\mathcal{F}_{T_i}) = 0$$

3.

$$E((\sum_{k=j}^{\infty} L_k)^2|\mathcal{F}_{T_i}) = \sum_{k=j}^{\infty} E(L_k^2|\mathcal{F}_{T_i}).$$

Nun sei V der Barwert der Versicherung, und $M_t = E(V|\mathcal{F}_t)$ M_t ist rechtsstetig und besitzt fast sicher Pfade mit beschränkter Variation.

Definition 6.3.2 *Es seien $f, g \in BV([0,T])$ rechtsstetig. Wir definieren die Klammer*

$$[f,g](t) = f(t)g(t) - \int_0^t f(\tau - 0)dg(\tau) - \int_0^t g(\tau - 0)df.$$

Satz 6.3.3 *1. $[f, g]$ ist stetig von rechts, mit beschränkter Totalvariation.*

2.

$$|[f,g]| \leq \sqrt{[f,f]}\sqrt{[g,g]}.$$

3. $[f,g](0) = f(0)g(0)$, $[f,g]$ ist konstant in Intervallen, in denen f oder g stetig sind. Es gilt $\Delta[f,g](t) = \Delta f(t)\Delta g(t)$.

4. $[f,g] = [g,f]$.

Sei M wie oben:

$$M_t(\omega) = \sum_j \left(\int_0^t v(\tau) I_j da_j + \sum_{k \neq j} \int_0^t v(\tau) a_{jk}(\tau) dN_{jk}(\tau) \right) + v(t) \sum_j I_j(t) V_j^+(t).$$

Sei $W_j^+(t) = v(t)V_j^+(t)$. Da $t \to W_k^+(t)$ stetig differenzierbar ist, folgt $[W_j, W_j] = 0$ und

$$I_j(t)W_j(t) = I_j(0)W_j(0) + \int_0^t I_j(\tau)dW_j(\tau) + \int_0^t W_j(\tau)dI_j(\tau)$$

wobei

$$dI_j(t) = \sum_{k \neq j} dN_{kj}(t) - dN_{jk}(t)$$

und daher

$$\sum_j I_j W_j^+ = W_0(0) + \sum_j \int_0^t I_j(\tau)dW_j(\tau) + \sum_{k \neq j} \int_0^t (W_k(\tau) - W_j(\tau))dN_{jk}.$$

Wir erhalten

Satz 6.3.4

$$\begin{aligned} M_t(\omega) = \sum_{j \in S} \Bigg(& \int_0^t I_j(\tau)da_j(\tau) + \int_0^t I_j(\tau)dW_j^+(\tau) \\ & + \sum_{k \neq j} \int_0^t (a_{jk}(\tau) + W_k^+(\tau) - W_j^+(\tau))dN_{jk} \Bigg). \end{aligned}$$

Wir definieren den Varianzprozess $[M, M]$ pfadweise.

Satz 6.3.5 (Hattendorff) *Es gelten*

$$d[M, M](t) = \sum_{k \neq j} (a_{jk}(t) + V_k(t) - V_j(t))^2 v^2(t) dN_{jk}(t).$$

Damit sind die Beiträge aus verschiedenen Zeiten und Zuständen unkorreliert.

Wir benötigen eine Konsequenz aus dem Doobschen Stoppsatz.

Satz 6.3.6 *Seien $0 \leq S \leq T$ Stoppzeiten. Dann ist*

$$E(\int_S^T M(t-0)dM(\tau)) = 0.$$

Wir definieren

$$R_{jk}(t) = a_{jk}(t) + V_k^+(t) - V_j^+(t)$$

als Risikosumme. Sie besteht aus Leistungen, die beim Übergang bezahlt werden und aus der Differenz der Deckungskapitalien.

Wir erhalten

Satz 6.3.7 (Hattendorff) *Es gelten die Aussagen falls* $X_0 = 1$

$$Var\ M(t) = \sum_{j,k \in S, j \neq k} \int_0^t v(\tau)^2 p_{1j}(0,\tau)\mu_{jk}(\tau)R_{jk}^2(\tau)d\tau \tag{6.3.1}$$

und

$$Var\ (V(t)|X_t = i) = v(t)^{-2} \sum_{j,k \in S, j \neq k} \int_t^\infty v(\tau)^2 p_{ij}(0,\tau)\mu_{jk}(\tau)R_{jk}^2(\tau)d\tau. \tag{6.3.2}$$

Kapitel 7

Die Berechnung der Prämien

Die Berechnung der Prämie erfolgt mittels des Äquivalenzprinzips. Allerdings müssen Zuschläge eingearbeitet werden. Die Bruttoprämie setzt sich aus

1. Nettoprämie (= erwartete Leistung),
2. + Sicherheitszuschläge,
3. + Kostenzuschläge (= Ausreichende Prämie),
4. + Gewinnzuschlag (= Tarifprämie),
5. + Versicherungssteuer

zusammen.

7.1 Rechnungsgrundlagen

Die Nettoprämie wird mittels Rechnungsgrundlagen erster Ordnung ermittelt. Dazu muss zunächst festgestellt werden, ob die Versicherung eine Versicherung auf den Todesfall oder eine Versicherung auf den Erlebensfall ist, oder ob sie sich in zwei derartige Versicherungen zerlegen läßt.

Definition 7.1.1 *Eine Versicherung ist eine Versicherung auf den Erlebensfall, falls jede Erhöhung der Sterblichkeiten das prospektive Deckungskapital erniedrigt. Eine Versicherung ist eine Versicherung auf den Todesfall, wenn jede Erhöhung der Sterblichkeiten das prospektive Deckungskapital erhöht.*

Beispiele:

1. Risikolebensversicherungen mit fester Summe: Versicherung auf den Todesfall. In der Regel tritt der VN in Vorleistung (Deckungskapital positiv).

2. Rentenversicherung nach Ende der Beitragszahlungen: Versicherung auf den Erlebensfall.

3. Rentenversicherung ab 65, davor Beitragszahlung.

Für die Kalkulation von Versicherungen werden Sicherheitszuschläge benötigt. Ohne Sicherheitszuschläge würde jede Versicherung fast sicher irgendwann in Konkurs gehen. Die Sicherheitszuschläge werden in der Lebensversicherung durch eine vorsichtige Wahl der Rechnungsgrundlagen implizit eingearbeitet (vorsichtiger Rechnungszins).

Alternativen sind:

1. Ein Sicherheitszuschlag proportional zum Erwartungswert der Barwerte der Versicherungsleistungen.

2. Ein Sicherheitszuschlag proportional zur Standardabweichung der Barwerte der Versicherungsleistungen.

3. Ein Sicherheitszuschlag proportional zur Varianz der Versicherungsleistungen.

4. Ein Sicherheitszuschlag proportional zu

$$E(V^+ - EV^+)_+^2.$$

Zuschläge für erhöhte Risiken

Erhöhte Risiken werden über Risikozuschläge berücksichtigt. Man wählt relativ einfache Abänderungen der Sterblichkeiten, die von wenigen oder nur einem einzigen Parameter abhängen. Diese(r) Parameter wird an Hand von Daten geschätzt.

Möglichkeiten:

1. Multiplikative Erhöhung der Sterblichkeit (altersunabhängiges Krankheitsbild, erhöhter Blutdruck).

2. Additive Erhöhung (Abnehmende Gefährlichkeit, Magengeschwür).

3. Alterserhöhung (zunächst anwachsende, später fallende Schwere (z.B. Krebs)).

Zur Ermittlung der erhöhten Sterblichkeiten muss eine Konstante geschätzt werden.

Sinnvoll kann eine Vertragsgestaltung sein, bei der die Risikozuschläge bei Erleben der Vertragslaufzeit zurückgezahlt wird.

7.2 Technische Zerlegung der Prämie

Wir betrachten das diskrete Modell.

Definition 7.2.1 (Folgezustand) *Sei S der Zustandsraum. Der natürliche Folgezustand ist eine Abbildung $\phi : S \to S$.*

Definition 7.2.2 (Sparprämie) *Die Sparprämie im Zustand i zur Zeit t ist*

$$\Pi_i^{(s)}(t) = v(t+1)/v(t) V_{\Phi(i)}^+(t+1) - V_i^+(t).$$

Definition 7.2.3 (Technisch geschuldete Rente) *Die technisch geschuldete Rente ist*

$$\Pi_i^{(tr)}(t) = a_i^{Pre}(t) + v(t+1)/v(t) a_{i\Phi(i)}^{Post}(t).$$

Definition 7.2.4 (Risikosumme und Risikoprämie) *Für $i \in S$ und $j \neq \Phi(i)$ berechnet sich die Risikosumme durch*

$$R_{ij}(t) = V_j^+(t+1) + a_{ij}^{Post}(t) - (V_{\Phi(i)}^+(t+1) - a_{i\phi}^{Post}(t)).$$

Wir definieren die Risikoprämie für den Übergang vom Zustand i in den Zustand j

$$\Pi_{ij}^{(r)}(t) = p_{ij}(t) v(t+1)/v(t) R_{ij}(t)$$

und die totale Risikoprämie

$$\Pi_i^{(r)}(t) = \sum_{j \neq \Phi} \Pi_{ij}^{(r)}(t).$$

Satz 7.2.5 (Technische Zerlegung) *Es gilt*

$$-\Pi_i^{(tr)} = \Pi_i^{(r)}(t) + \Pi_i^{(s)}(t).$$

Bei Bruttoprämien unterteilt man in Sparprämie, Risikoprämie und Kostenprämie.

7.3 Kosten des Versicherungsunternehmens

Das VU ordnet die Kosten den einzelnen Verträgen zu.

1. Proportional zur versicherten Leistung.
2. Proportional zur ausreichenden Prämie.
3. Stückkosten.

1. Die *Abschlusskosten* fallen zu Beginn des Vertrages an (α Kosten).
2. Die *Verwaltungskosten* teilen sich in β Kosten (proportional zur ausreichenden Prämie) und in γ Kosten, proportional zur Leistung, über die ganze Laufzeit zu zahlen) auf.

Zillmer Prämie, gezillmerte Prämie

Sei GA die Bemessungsgrundlage der Abschlusskosten, GG die Bemessungsgrundlage der Verwaltungskosten, n die Laufzeit des Vertrages mit $m \leq n$ jährlich vorschüssig zu zahlenden konstanten Prämien. Mit $\alpha > 0$ sind αGA die rechnerischen Abschlusskosten. Addiert man diese Kosten zur Versicherungsleistung, so erhält man die Zillmerprämie ${}^{\alpha}\mathcal{P}$. Ist B_x der Barwert der Versicherungsleistung,

$$ {}^{\alpha}\mathcal{P} = \frac{E(B_x) + \alpha GA}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}}, $$

wobei

$$ \ddot{a}_{x:\overline{m|}} $$

der erwartete Barwert einer m Jahre lang jährlich vorschüssig gezahlten Prämie ist (solange der Beitragszahler lebt). Die Äquivalenzgleichung für die ausreichende Prämie ist

$$ {}^{\alpha}\mathcal{P}\ddot{a}_{x:\overline{m|}} = E(B_x) + \alpha GA + \beta\,{}^{\alpha}\mathcal{P}\ddot{a}_{x:\overline{m|}} + \gamma GG\ddot{a}_{x:\overline{n|}}. $$

1. Der Zillmersatz ist maximal 4% der Prämiensumme.
2. $\beta \sim 3\%$.
3. $\gamma \sim 0.425\%$, bzw. $\gamma_1 \sim 0.425\%$ (Prämienzahldauer) und $\gamma_2 \sim 0.275\%$ danach.

7.4 Stornierung und Rückkaufswert

Das prospektive Deckungskapital kann im wesentlichen als Eigentum des Versicherungsnehmers betrachtet werden. Damit sollte dieses Kapital im wesentlichen bei der Kündigung bzw. dem Rückkauf ausgezahlt werden. Problem: Risikoselektion. Abhilfe:

Möglichkeiten:

1. Fester Prozentsatz des prospektiven Deckungskapitals.
2. Das Deckungskapital abzüglich ein Vielfaches der Risikosumme.
3. Das Deckungskapital abzüglich ein Vielfaches der Risikoprämie. $\sum_{j\neq\Phi(i)} R_{ij}$.

Die Stornierung führt zu Gewinn, der durch einen weiteren Zustand und die Stornierungswahrscheinlichkeiten in dem Modell berücksichtigt werden kann.

7.5 Vertragsumwandlung

Vertragsveränderungen werden realisiert, indem man das prospektive Deckungskapital möglicherweise abzüglich eines Abzugs wegen der Risikoselektion und eines Kostenabzugs und gegebenenfalls unter Berücksichtigung einer Übergangszahlung in die neue Versicherung übernimmt.

7.6 Bezeichnungen

Symbol für Prämienhöhen: $\mathcal{P}$ oder P. Z.B. ${}_nP_x$ ist die Höhe einer konstanten, jährlich vorschüssig während der Laufzeit zahlbaren Prämie für eine n jährige Todesfallversicherung mit Versicherungssumme 1 fällig am Ende des Todesjahres für (x) und $P_{x:\overline{n|}}$ die Prämie für die analoge gemischte Versicherung. Der erwartete Leistungsbarwert ist ${}_nA_x$ und $A_{x:\overline{n|}}$ und wir schreiben auch

$$ {}_nP_x = P({}_nA_x). $$

Ist B_x der Barwert einer Versicherung, so kann man das Äquivalenzprinzip als

$$ E(B_x) = \mathcal{P}\ddot{a}_{x:\overline{n|}} $$

schreiben.

Prämie einer maximal n Jahre vorschüssig zu zahlenden Leibrente der Höhe 1:

$$ a_{x:\overline{m|}} \tag{7.6.1} $$

Prämie einer n jährigen Erlebensfallversicherung mit Versicherungssumme 1:

$$ P({}_nE_x) = \frac{{}_nE_x}{\ddot{a}_{x:\overline{n|}}} \tag{7.6.2} $$

Prämie einer vorschüssig zahlbaren um $m \leq n$ Jahre aufgeschobenen temporären Leibrente der Dauer $m - n$ mit Jahresbeitrag 1 und Prämienzahlung während der Aufschubzeit:

$$ P({}_{m|n-m}\ddot{a}_x) = \frac{{}_{m|n-m}\ddot{a}}{\ddot{a}_{x:\overline{m|}}} \tag{7.6.3} $$

Anwartschaft auf eine jährlich vorschüssig zahlbare Altersrente vom Jahresbetrag 1 (*A*ltersrente, *a*ktiven Rente):

$$ P(\ddot{a}^{aA}) = \frac{\ddot{a}_x^{aA}}{\ddot{a}^{aa}_{x:\overline{z-x|}}} \tag{7.6.4} $$

Kapitel 8

Überschüsse und die Überschussverteilung

8.1 Die Ursachen für Überschüsse

Falls die Rechnungsgrundlagen den aktuellen Werten entsprechen, so ist der Erwartungswert des Gewinns Null und die Schwankungen sind klein. Zu Anfang des Jahres wird der erwartete Gewinn mit Hilfe von Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung ermittelt. Folgende Effekte beeinflussen den Gewinnprozess:

1. Wertschriftengewinne/Verluste.
2. Risikogewinne/Verluste.
3. Kostengewinne/Verluste.
4. Rückversicherung.
5. Rückkäufe.
6. Überschüsse.

Zinsmodelle: Deterministisch/stochastisch (Aktien),
Anlageportefeuille:

1. Aktien.
2. Beteiligungen.
3. Langfristige Wertpapiere.

Das Kapital der Versicherung setzt sich aus dem Deckungskapital der Verträge und dem freien Kapital zusammen. Zu Anfang des Jahres wird die voraussichtlich zu erzielende Rendite festgesetzt und die Sterblichkeiten angepasst. Wir bezeichen Rechnungsgrundlagen zweiter Ordnung mit einem Strich.

Ansätze für die Sterblichkeiten:

1. (Helbig 1978) $q'_x = c_x q_x$ wobei
$$c_x = \begin{cases} a & \text{falls } x \leq x_1 \\ a + 0.01(x - x_1) & \text{falls } x_1 < x \leq x_2 \\ a + 0.01(x_2 - x_1) & \text{falls } x \geq x_2 \end{cases}$$

2. Stornowahrscheinlichkeiten
$$s'_{k:\overline{n}|} = \begin{cases} 0.025 & k = 0 \\ 0.041 & k = 1 \\ 0.041 - 0.031\frac{k-1}{n-4}, & 1 < k \leq n - 3 \\ 0.01 & k > n - 3 \end{cases}$$

Beispiele $x_1 = 45$, $x_2 = 65$, $a = 0.3$. Alternativ: Stornotafeln aus Bestandsdaten.

8.2 Die Kontributionsformel

Der Überschuss wird in der Kontributionsformel in die Ursachen zerlegt.

Es seien

- ${}_{k+1}G_x$ der erwartete Gewinn im $k + 1$ ten Jahr unter der Veraussetzung, dass (x) das Alter $k + 1$ erlebt.
- ${}^a_kV_x$ und ${}^aP_x$ das ausreichende Deckungskapital bzw die ausreichende Rente.
- EIN_k die Einnahmen im Jahr k.
- AUS_k die Ausgaben im Jahr k.
- $D(k + 1)$ die Leistung im Falle des Ablebens.
- KO' Verwaltungskosten.
- RW_x der Rückkaufswert.

Es gilt
$$EIN_k = ({}^a_kV_x + {}^aP_x)(1 + i'_k)$$
$$AUS_k = q'_{x+k}D(k + 1) + p'_{x+k}\,{}^a_{k+1}V_x + s'_{k:\overline{n}|}RW_x(k + 1) + KO'_k(1 + i'_k)$$

und
$$p'_{x+k} + q'_{x+k} + s'_{k:\overline{n}|} = 1.$$

Es gilt
$$\begin{aligned} p'_{x+k}\,{}_{k+1}G_x =& EIN_k - AUS_k \\ =& ({}^a_kV_x + {}^aP_x - KO'_k)(1 + i'_k) - q'D(k + 1) \\ & - p'_{x+k}\,{}^a_{k+1}V_x - s'_{k:\overline{n}|}RW_x(k + 1). \end{aligned}$$

Aufgrund der Thieleschen Differenzengleichung gilt

$$\begin{aligned} 0 =& ({}^a_kV_x + {}^aP_x - KO_k)(1+i_k) - qD(k+1) \\ & - p_{x+k}{}^a_{k+1}V_x - s_{k:\overline{n|}}RW_x(k+1) \end{aligned}$$

Satz 8.2.1 (Kontributionsformel) *Es gilt die Kontributionsformel für den bedingten erwarteten Gewinn:*

$$\begin{aligned} p'_{x+k}{}_{k+1}G_x = \quad & (D(k+1) - {}^a_{k+1}V_x)(q_{x+k} - q'_{x+k} && \textit{Sterblichkeitsüberschüsse} \\ & +({}^a_kV_x + {}^aP_x - KO'_k)(i'_k - i) && \textit{Zinsüberschüsse} \\ & +({}^a_{k+1}V_x - RW_x(k+1))(s'_{k:\overline{n|}} - s_{k:\overline{n|}}) && \textit{Stornoüberschüsse} \\ & +(KO - KO')(1+i) && \textit{Kostenüberschüsse} \end{aligned}$$

Die Kontributionsformel erlaubt einen Satz zur Verteilung der Überschussanteile.

8.3 Die Verwendung der Überschüsse

Ziel: Geringe Schwankung der Überschussanteile. Mögliche Verwendungen:

1. Beitragsrückgewähr.
2. Abschluss einer Lebensversicherung mit Einmaleinlage in Höhe des rückgewährten Betrages (Erhöhung der Versicherungsleistung).
3. Verzinsliche Ansammlung (Sparbuch).
4. Rückstellung für eine Schlussüberschussbeteiligung.
5. Abkürzung der Dauer.

Weitere Kosten: Prämien für Rückversicherungen, sonstige Ursachen.