

UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Herbert Koch
Dipl.-Math. Martin Hadac

Übungsaufgaben Partielle Differentialgleichungen I, Blatt 9 Abgabe Mittwoch, den 17.12.03, 10 Uhr, Kastennr. 34

26. Es sei u eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{in } [0, \infty) \times \mathbb{R} \\ u(0, x) &= g(x), \quad u_t(0, x) = h(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

für $g, h \in C_0^2(\mathbb{R})$. Wir definieren für $t \in [0, \infty)$ die kinetische Energie $k(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_t^2(t, x) dx$ und die potentielle Energie $p(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} u_x^2(t, x) dx$. Man zeige:

- Es ist $k(t) + p(t)$ konstant für alle $t \in [0, \infty)$.
- Es gibt ein $t_0 \in [0, \infty)$, so daß $k(t) = p(t)$ für alle $t \geq t_0$ gilt.

27. Eindeutigkeit der Lösung der Wellengleichung in \mathbb{R}^n .

Es seien $u, v \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$ Lösungen der Wellengleichung

$$\begin{aligned}u_{tt} - \Delta u &= 0 && \text{in } [0, \infty) \times \mathbb{R}^n && (1) \\ u(0, x) &= g(x), \quad u_t(0, x) = h(x) && \text{für } x \in \mathbb{R}^n && (2)\end{aligned}$$

wobei $g \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $h \in C^1(\mathbb{R}^n)$ gelte. Man zeige, daß dann $u = v$ gilt.

28. Es sei $u \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^3)$ eine Lösung der Wellengleichung (1), (2) für $n = 3$ und $g, h \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$. Man zeige, daß es ein $C > 0$ gibt mit $|u(t, x)| \leq Ct^{-1}$ für alle $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3$.

29. Die Wellengleichung in einem beschränkten Intervall. Es seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen mit $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |a_n| < \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} n |b_n| < \infty$. Wir definieren nun $g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ und $h(x) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$ für $x \in [0, \pi]$ und betrachten das Rand-/Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{in } [0, \infty) \times (0, \pi) \\ u(t, 0) &= u(t, \pi) = 0 && \text{für } t \in [0, \infty) \\ u(0, x) &= g(x), \quad u_t(0, x) = h(x) && \text{für } x \in (0, \pi)\end{aligned}$$

Für die Lösung machen wir den Ansatz $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t) \sin(nx)$ für $t \in [0, \infty)$ und $x \in [0, \pi]$, wobei die α_n noch zu bestimmende Funktionen sind, die nur von t abhängen.

- Man zeige, daß $g \in C^2([0, \pi])$ und $h \in C^1([0, \pi])$ gilt.
- Man bestimme die gewöhnliche Differentialgleichung, die die α_n erfüllen müssen damit u eine Lösung der Wellengleichung ist.
- Man löse das zu der gewöhnlichen Differentialgleichung aus b) gehörende Anfangswertproblem und zeige, daß mit den so erhaltenen Funktionen α_n gilt: $u \in C^2([0, \infty) \times (0, \pi))$ und u löst das obige Rand-/Anfangswertproblem.