UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Herbert Koch
Dipl.-Math. Martin Hadac

Übungsaufgaben Partielle Differentialgleichungen I, Blatt 13

Abgabe Mittwoch, den 28.01.04, 10 Uhr, Kastennr. 34

39. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Für $u \in W^{2,2}(U) \cap W_0^{1,2}(U)$ zeige man

$$\int_U |\nabla u(x)|^2 \, dx \leq (\int_U |u(x)|^2 \, dx)^{1/2} (\int_U |\Delta u(x)|^2 \, dx)^{1/2}.$$

40. Es sei Ef für $f \in W^{1,\infty}(B_1(0))$ definiert durch

$$Ef(x) = \begin{cases} f(x), & |x| < 1, \\ f(\frac{x}{|x|^2}), & |x| > 1. \end{cases}$$

Man zeige, daß $E : W^{1,\infty}(B_1(0)) \to W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ ein Fortsetzungsoperator ist, d.h. daß E linear und stetig ist sowie daß $Ef(x) = f(x)$ gilt für $x \in B_1(0)$.

41. Konvergenzbegriffe.

a) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes und beschränktes Intervall. Es seien Funktionenfolgen $(f_n)_{n\geq 1}$ und $(g_n)_{n\geq 1}$ definiert durch $f_n(x) := e^{inx}$ und $g_n(x) := \sin(nx)$ für $x \in I$. Man bestimme, ob diese Folgen in $\mathcal{D}^*(I)$ konvergieren und ggf. den Grenzwert. Konvergieren die Folgen auch stark bzw. schwach in $L^p(I)$ für $1 \leq p < \infty$? Konvergieren die Folgen auch stark bzw. schwach * in $L^\infty(I)$? Wo sind sie punktweise konvergent?

b) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Die Funktionenfolge $(h_n)_{n\geq 1}$ sei definiert durch $h_n(x) := \frac{1}{n} \sin(nx_1)$ für $x \in U$. Man bestimme, ob $(h_n)_{n\geq 1}$ und die Folgen $(\partial_{x_j} h_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{D}^*(U)$ konvergieren und ggf. den Grenzwert. Konvergiert $(h_n)_{n\geq 1}$ auch stark bzw. schwach in $W^{1,p}(U)$ für $1 \leq p < \infty$? Konvergiert die Folge auch stark bzw. schwach * in $W^{1,\infty}(I)$? Was ist mit punktweiser Konvergenz?