UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik
Institut für Analysis
Prof. Dr. Herbert Koch
Dipl.-Math. Martin Hadac

Übungsaufgaben Partielle Differentialgleichungen I, Blatt 1

Abgabe Mittwoch, den 22.10.03, 10 Uhr, Kastennr. 34

1. Konvergenzbegriffe in L^2. Man zeige:

a) Für die Folge $f_n := \chi_{[n,n+1]}$ in $L^2(\mathbb{R})$ zeige man, daß sie schwach in $L^2(\mathbb{R})$ konvergiert und bestimme die Grenzfunktion.

b) Man zeige, daß die Folge aus a) nicht stark in L^2 konvergiert. Ist die Folge fast überall punktweise konvergent?

c) Man finde eine Folge in $L^2(\mathbb{R})$, die fast überall punktweise gegen 0 konvergiert, jedoch nicht schwach in L^2 konvergiert.

2. Man zeige:

a) Wie in Aufgabe 1a),b) finde man Folgen $x^{(n)}$ in l^2, so daß $x^{(n)}$ schwach aber nicht stark in l^2 konvergiert.

b) $x^{(n)} \in l^2$ sei gegeben durch $x_k^{(n)} = \begin{cases} n \text{ für } k = n, \\ 0 \text{ für } k \neq n. \end{cases}$ Man zeige, daß $x^{(n)}$ für $n \to \infty$ punktweise gegen 0 konvergiert, aber nicht schwach in l^2 konvergiert.

3. Die Cantor-Funktion. Die Cantor-Menge $C \subset [0,1]$ wird beschrieben durch

$$C = \{\sum_{k=0}^{\infty} (2x_k)3^{-k} | x_k \in \{0,1\} \text{ für } k \in \mathbb{N}_0\},$$

wobei die Reihendarstellung eindeutig ist. Die Cantor-Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert man nun so: Für $x \in C$ setzen wir zunächst $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} x_k 2^{-k}$. Für $x \in [0,1] \setminus C$ setzen wir $f(x) := \sup\{f(y) | y \in C, y \leq x\}$. Man zeige:

a) f ist monoton.

b) f ist stetig.

c) Für alle $x \in [0,1] \setminus C$ ist f differenzierbar mit $f'(x) = 0$.

d) Ist C eine Nullmenge? Ist f konstant auf $[0,1]$?

Bitte wenden.

Hinweise zu Aufgabe 1. Für Funktionen $f_n, f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ betrachten wir die folgenden Konvergenzbegriffe.

- f_n konvergiert (stark) gegen f in $L^2(\mathbb{R}^n)$, falls $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2 = 0$.
- f_n konvergiert schwach gegen f in $L^2(\mathbb{R}^n)$, falls für alle $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)\,dx.$$

- f_n konvergiert fast überall (punktweise) in $\mathbb{R}^n$ gegen f, falls es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus N$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Hinweise zu Aufgabe 2.
Für Folgen $x^{(n)} \in l^2$ betrachten wir die folgenden Konvergenzbegriffe.

- $x^{(n)}$ konvergiert (stark) gegen x in l^2, falls $\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)} - x\|_2 = 0$.
- $x^{(n)}$ konvergiert schwach gegen x in l^2, falls für alle $y \in l^2$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x_k^{(n)} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$$

- $x^{(n)}$ konvergiert punktweise gegen x in l^2, falls für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k$.

Hinweise zu Aufgabe 3.
Man kann die Cantor-Menge C auch so definieren: Zunächst seien Mengen $S_k \subset [0,1]$ rekursiv definiert durch (siehe auch Abbildung 1):

$$S_0 := [0,1], \quad S_{k+1} := \frac{1}{3}S_k \cup (\frac{1}{3}S_k + \frac{2}{3}),\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Dann ist die *Cantor-Menge* C definiert durch $C := \cap_{k=0}^{\infty} S_k$.

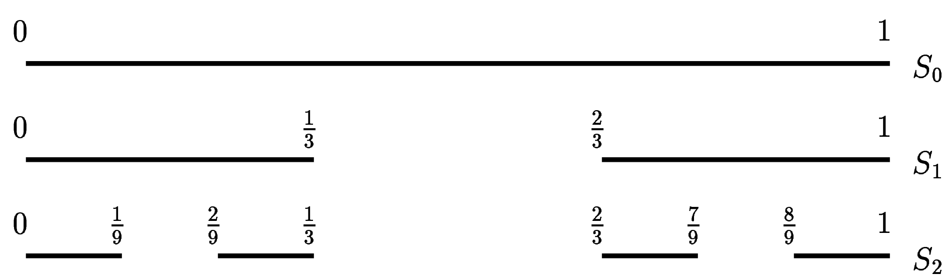

Abbildung 1: Zur Definition der Mengen S_k